ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
72

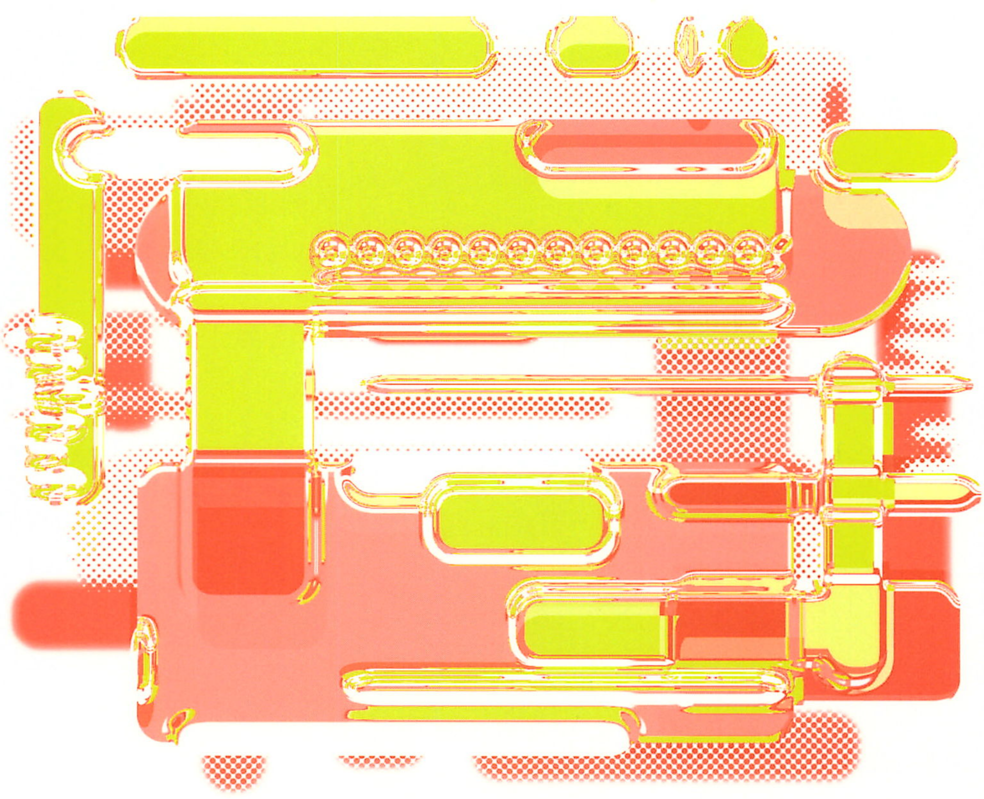
For Senior & Graduate Courses

超関数・フーリエ変換入門

基礎から偏微分方程式への応用まで

◆

磯崎 洋 著



サイエンス社

SGC ライブラリ–72

超関数・フーリエ変換入門

基礎から偏微分方程式への応用まで

磯崎 洋 著

サイエンス社

SGCライブラリ（The Library for Senior & Graduate Courses）

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野および諸分野の相互に関連する**領域から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），

脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

1 **カオスと量子物理学**
中村勝弘著　本体 1857 円

5 **有限体と符号理論**
内田興二著　本体 1667 円

8 **差分方程式講義**
広田良吾著　本体 1857 円

9 **生命をつくる**
中野馨著　本体 1524 円

16 **有限要素法による構造解析事例集**
白鳥正樹・三好俊郎 共編著　本体 1429 円

18 **独立成分分析**
甘利俊一・村田昇 共編著　本体 1667 円

23 **微分幾何講義**
二木昭人著　本体 1857 円

26 **脳型コンピュータの実現に向けて**
甘利俊一編著　本体 1857 円

27 **ガロア理論**
中野伸著　本体 1790 円

28 **量子可積分系入門**
白石潤一著　本体 1876 円

29 **伝えるための理工系英語**
宮野健次郎著　本体 1429 円

31 **分子コンピュータの現状と展望**
萩谷昌己編著　本体 1524 円

32 **量子情報理論入門**
林正人著　本体 1886 円

33 **工学のための非線形解析入門**
藪野浩司著　本体 1857 円

34 **経済における確率的モデルへの招待**
青木正直著／青山・藤原 監訳　本体 1886 円

35 **賭けの数理と金融工学**
竹内啓著　本体 1429 円

36 **応用のための確率論・確率過程**
松本裕行著　本体 1876 円

38 **複素ニューラルネットワーク**
廣瀬明著　本体 1695 円

40 **制御理論講義**
木村英紀著　本体 1886 円

41 **バイオインフォマティクスの基礎**
冨田勝監修 斎藤輪太郎著　本体 1857 円

42 **トポロジー入門**
田中利史・村上斉 共著　本体 1886 円

43 **アルゴリズムと計算量**
谷聖一著　本体 1857 円

44 **ゲーム理論のフロンティア**
池上高志・松田裕之 共編著　本体 1829 円

45 **ゲージ場の量子論入門**
近藤慶一著　本体 1886 円

46 **現代物理のための解析力学**
早田次郎著　本体 1857 円

47 **現代物理数学への招待**
鈴木淳史著　本体 1876 円

48 **例題形式で学ぶ現代素粒子物理学**
川村嘉春著　本体 1886 円

49 **ソリトンと物理学**
戸田盛和著　本体 1876 円

50 **確率的情報処理と統計力学**
田中和之編著　本体 1857 円

51 **超対称性理論**
太田信義・坂井典佑 共著　本体 1819 円

52 **理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何**
谷村省吾著　本体 1886 円

53 **ゲノム進化を考える**
斎藤成也著　本体 1429 円

54 **非平衡統計力学**
早川尚男著　本体 1790 円

55 **超幾何関数入門**
木村弘信著　本体 1857 円

56 **相対性理論**
三尾典克著　本体 1838 円

57 **3 次元トポロジーの新展開**
戸田正人著　本体 1867 円

58 **数理・情報系のための整数論講義**
木田雅成著　本体 1876 円

59 **コンピュータ将棋の頭脳**
小谷善行著　本体 1429 円

60 **計算神経科学への招待**
銅谷賢治著　本体 1429 円

61 **演習くり込み群**
柏太郎著　本体 1886 円

62 **熱方程式で学ぶ逆問題**
山本昌宏・金成煥 共著　本体 1429 円

63 **重力理論講義**
前田恵一著　本体 1886 円

64 **代数幾何入門講義**
小林正典著　本体 1876 円

65 **ネットワーク科学への招待**
青山・相馬・藤原 共編著　本体 1886 円

66 **物理のためのリー群とリー代数**
窪田高弘著　本体 1886 円

67 **量子暗号理論の展開**
小芦雅斗・小柴健史 共著　本体 1838 円

68 **量子力学の考え方**
根本香絵著　本体 1829 円

69 **量子コンピュータの基礎［第 2 版］**
細谷暁夫著　本体 1876 円

70 **重点解説 基礎微分幾何**
塩谷隆著　本体 1886 円

71 **ε-δ 論法再入門**
中神祥臣著　本体 1857 円

72 **超関数・フーリエ変換入門**
磯崎洋著　本体 1857 円

始めに

デルタ関数に初めて出会うのは物理か電磁気学の講義においてであろう．実際，自然科学の中にデルタ関数が登場したのもこれらの分野を通じてであった．1893 年に工学者のヘビサイド (Heaviside) は Symbolic calculus の名で解析学に関連した代数的演算を導入したが，その中にデルタ関数が既に含まれていた．しかし計算結果は正しいのだがその根拠は不可思議なものに思われ，ヘビサイドの考え方は (少なくとも数学者には）当時は認められなかったようである．1927 年にディラック (Dirac) は著書「量子力学」の中でデルタ関数とその演算を導入し，それが量子力学の数学的計算の中で極めて有用であることを立証した．彼自身それは普通の関数ではなく，広い意味の関数であることを認識している．さらに「量子論で広い意味の関数が現れるときはいつでも結局は何か積分される関数の中で用いられるものとなっている．それゆえ理論を書き改めて，広い意味の関数は始めから終りまで積分される関数の中だけにしか現れないような形とすることも可能なはずである」と述べている．しかしその数学的背景は依然として未知であった．

ローラン・シュワルツ (Laurent Schwartz) が超関数 (Distribution) の概念に至ったのは 1944 年から 45 年のことらしい．線形汎関数として関数概念を拡張するというアイディアはディラックの考え方に符合するものがある．シュワルツ自身の考察は，応用の観点よりはむしろ伝統的な解析学の基本問題，微分方程式と微分不可能な解，関数の積分表示と微分可能性，たたみこみ等の問題から関数概念の一般化へと進んできたようである．1951 年に出版された本「超函数の理論」はほぼ完成した全体系であるが，その中にはデルタ関数とそのフーリエ変換が平易な形でとりこまれており，ここにデルタ関数は数学の中で完全な市民権を得ることになった．超関数は 1950 年代から 1980 年代にかけて線形偏微分方程式研究の大きな流れの源となった．その中で生まれた種々の概念はその後の非線形偏微分方程式研究の中にも活用されている．解析学の基礎として微積分，微分方程式，関数解析の初歩等が挙げられるが，超関数論は基礎のうちの高度な部分として今後も重要性を失わないと思われる．特にデルタ関数とそのフーリエ変換とは数学の基本的概念として今後も引き継がれていくことであろう．

超関数が偏微分方程式を考える基礎的道具となったのは次のような事情による．一般に微分方程式の解を具体的に書き下すことは大変に難しく多くの場合，逐次近似的な手法をとる．要するに近似解の列の極限として解を構成するのであるが，常微分方程式の場合には極限として得られた関数が十分な微分可能性を持っていることが容易に分かり，解であることを確かめるのに問題は起こらない．しかし偏微分方程式の場合には関数解析的な手法をとることが多く，無限次元の関数空間の中で解の構成を行うことになる．このとき，近似列の極限として得られた関数が必要な微分可能性を持つかどうかは最初は分からないこともある．そのような場合でも得られた関数は，考えている方程式に性質の良い関数をかけて部分積分した形の方程式を満たしていることが分かる．このよう

なものを微分方程式の弱解と呼ぶ．弱解の概念は 1930 年代から登場していたのであるが，超関数論はこの弱解を微分方程式の基本概念として定着させた．実際，例えば波の伝播のような問題においては微分可能性を持たない弱解も物理的状況に対応した現実のものであり，超関数論はそれらを数学的に正当に論ずることを可能にしたのである．

ここで強調しなくてはならないのは，超関数論が誕生したからといって古典的な解析学の手法が無用になったというのでは決してない，ということである．微積分，複素関数論，フーリエ解析とそこに現れる古典的な例が解析学の基本手段であることに変わりはない．超関数論は一見孤立して現れるこれらの例を共通に理解する基盤を与え，計算を容易にして扱い易いものに変えたのである．

本書はこの超関数とフーリエ変換の理論の入門的解説を目指すものである．大学の数学科 4 年から大学院前期課程のレベルを念頭におき，解析学の高度な基礎としての観点からルベーグ積分論のすぐ後で学べるような述べ方を心掛けた．特に例をたくさん挙げるように努めたが，これらの例は単なる計算練習ではなしに実際の問題に現れるものであり，これを詳しく説明することに主な目標を置いた．従って超関数論のもう一つの背景である位相ベクトル空間の議論は最低限にとどめた．

内容は以下のとおりである．目次で $*$ をつけたところは初学の段階ではとばして読む方がよい．まず第 1 章で 1 変数の可積分関数のフーリエ変換の理論を学ぶ．急減少関数に対するフーリエ変換が主な目標である．同時にルベーグ積分の使い方の復習も行う．学部段階ではここまでが目標であろう．第 2 章は複素関数論に関連したフーリエ変換の話題を扱う．ここは意欲的な読者のためのもので初学の段階ではすぐに第 3 章に向かうのがよいであろう．第 3 章では 1 変数の超関数とそのフーリエ変換を学ぶ．シュワルツによる緩増加超関数のフーリエ変換が主な目標である．種々の例を挙げたが，これらはすべて基本的で重要なものである．第 4 章ではまず多変数の微積分，特にベクトル解析を復習する．多重指数を用いることによって多変数の微積分学を 1 変数の場合と同様の簡単な式で表示できるので，この章の内容は是非身につけておくべきである．次に多変数の超関数とそのフーリエ変換を扱う．ここまでが解析学を志望する大学院生の（あるいは意欲的な学部学生の）基礎知識であろう．それ以後は偏微分方程式への応用を述べた．第 5 章は楕円型方程式の最も基本的な例であるラプラス方程式，ヘルムホルツ方程式を扱う．第 6 章で扱う定常位相の方法はパラメータを含む積分を近似するための強力な手段であり，深い漸近解析を必要とする場面で極めて有効であるから是非修得しておく方がよい．第 7 章では波動方程式の基礎を扱う．ここはいわゆる超局所解析の入門でもある．

解析学の高度な基礎という位置付けから微積分学と複素関数論のみを仮定し，関数解析学の知識はその都度説明した．フーリエ解析を学ぶ上でルベーグ積分論は本来，必須の知識であるが，初めて学ぶ読者，あるいは応用を主眼とする読者を考慮して測度論的考察には立ち入らないように努めた．具体例を計算するには連続関数に関する積分の知識で十分である．むしろルベーグ積分論の使い方を学ぶという気持ちになる方がよい．基本的には次のような事柄を心にとめておけばよい．本書では $\boldsymbol{R}^n$ 上のルベーグ測度のみを考える．

- 直線上の可測集合とは長さ（大きさ）が測れるような集合のことである．例えば開集合，閉集合は可測である．可測集合 E の測度を $\mu(E)$ と書く．これは 0 以上の数である．$\mu(E)=\infty$ となることもある．E が 2 点 a,b $(a\le b)$ を端点とする区間なら $\mu(E)=b-a$ である．測度

0 の集合を零集合という．

・$E_1, E_2, \cdots$ が可測なら $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ も可測であり，$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ である．$E_i \cup E_j = \emptyset$ がすべての $i \neq j$ に対して成り立つときは $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ である．E が可測なら E の補集合 E^c も可測である．

・集合 E の特性関数 $\chi_E(x)$ とは $\chi_E(x) = 1\ (x \in E)$，$\chi_E(x) = 0\ (x \notin E)$ を満たす関数 $\chi_E(x)$ のことである．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_E(x)dx = \mu(E) \tag{1}$$

が成り立つ．区間の特性関数の 1 次結合を階段関数という．

・可測集合や可測関数の正確な定義は与えないが通常思いつく集合や関数はすべて可測と思ってよい．本書では以後，可測な集合や関数のみを考えることとし可測という言葉を省略する．関数 $f(x)$ が E 上で可積分とは $|f(x)|$ の E 上での積分が有限になることである．

・p を $1 \leq p < \infty$ を満たす定数とするとき，$L^p(\Omega)$ とは $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$ となる Ω 上の関数全体である．$f \in L^p(\Omega)$ の L^p-ノルムは

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \tag{2}$$

で定義される．$p = \infty$ のときは $\Omega(|f| > C) = \{x \in \Omega; |f(x)| > C\}$ とおくとき

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; \mu\big(\Omega(|f| > C)\big) = 0\} \tag{3}$$

で定義される．ここで μ は $\boldsymbol{R}^n$ 上のルベーグ測度である．より簡略に $\|f\|_p$ と書くことも多い．特に $p = 1$ の場合が Ω 上で可積分な関数全体である．次の不等式はよく用いられる．

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q \geq 1. \tag{4}$$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad p \geq 1. \tag{5}$$

任意の $\epsilon > 0$ と $f(x) \in L^p(I)$ に対して，ある階段関数 $g(x)$ が存在し $\|f - g\|_p < \epsilon$ となる．

・$\boldsymbol{R}^n$ 上の連続関数 f の台 $\mathrm{supp}\, f$ とは $F = \{x \in \boldsymbol{R}^n; f(x) \neq 0\}$ という集合の閉包である．これは次のようにいってもよい．$x_0 \notin \mathrm{supp}\, f$ とは x_0 の近傍 $U(x_0)$ が存在し，$\int_{U(x_0)} |f(x)|^p dx = 0$ となることである．

・ルベーグ積分は平行移動に関する不変性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x + a)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

を持っている．

・2 つの関数 $f(x), g(x)$ が測度 0 の集合を除いて等しいとき，$f(x)$ と $g(x)$ は殆どいたるところ等しいといい，$f(x) = g(x)$ a.e. (on E) と書く．on E は省略されることもあるが E の中で測度 0 の集合を除いて等しいという意味である．a.e. とは almost everywhere の略である．言い換えると $f(x) = g(x)$ a.e. とは $\mu(\{x; f(x) \neq g(x)\}) = 0$ となることである．ルベーグ

積分を用いるときには特に断らない限り，$f(x) = g(x)$ を殆どいたるところ等しいという意味に用い，a.e. を省略することが多い．本書もその習慣に従うことにする．次の事実はよく用いられる．

$$\int_E |f(x)|dx = 0 \iff f(x) = 0 \quad \text{a.e. on } E. \tag{6}$$

・ルベーグ積分論では関数列の極限と積分の順序交換に関する極めて有用な定理がある．またフビニ (Fubini) の定理は 2 重積分の順序交換を保証する重要な定理である．第 1 章ではこれらの積分定理の使い方を直線上の積分の場合に詳しく述べた．より一般の場合にも同様であることは容易に理解できるはずである．

この本で使われる記号は標準的なものであるが，念のために主なものを以下にまとめる．

・$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ はそれぞれ実数全体，複素数全体．

・Ω を $\boldsymbol{R}^d$ の開集合とするとき $C^n(\Omega)$ は Ω 上で定義された n 回連続的微分可能関数全体．$C_0^\infty(\Omega)$ は Ω の中でコンパクトな台を持つ無限回微分可能関数全体である．

誕生して 60 年以上が過ぎた超関数は数学のいろいろな分野，特に数理物理学に自然な概念として吸収され，今日では常識的な考え方として用いられているように思われる．しかし，それは必ずしも超関数論が学び易くなったということを意味しない．初期の頃には多くの解説書が出版されたが，最近は殆ど見当たらない．現在の大学のカリキュラムの中では，超関数の概念はその重要性にもかかわらず断片的にしか取り上げられず，多くの場合，学生の自学自習に任されているのが実情ではなかろうか．超関数の発想そのものは単純であるが，それが本当に有効であることを納得するには解析学の古典的知識と近代的知識，また計算力と抽象的思考の双方が必要であり，簡単には自習できないように感じられる．ローラン・シュワルツの発想は古典数学にあった．解析学は古典から現代まで薄い層を幾重にも積み重ねて成り立っている．自習するときも各自の中で薄い層を積み重ねていくことが必要である．本書が超関数論の理解の一助となれば幸いである．

サイエンス社の平勢耕介氏は著者の原稿にあった多くの間違いを指摘され，さらに有益な助言を下された．これにより本書は原稿よりもはるかに改善された．深く感謝したい．

2009 年 12 月

磯崎　洋

目　次

第 1 章
可積分関数のフーリエ変換

可積分な関数のフーリエ変換の定義とその基本的性質を述べる．反転公式，微分作用素の多項式への変換，合成積の積への変換，フーリエ変換した関数の微分可能性ともとの関数の無限遠での減少度との関係が重要である．フーリエ変換によって不変な関数のクラスとして急減少関数の空間と 2 乗可積分な関数の空間がある．どちらも重要な応用を持つ．

1.1 フーリエの反転公式

1.1.1 フーリエ変換の定義

直線上の関数 $f(x)$ のフーリエ (Fourier) 変換は

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\boldsymbol{R}^1} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx, \quad \xi \in \boldsymbol{R}^1 \tag{1.1}$$

によって定義される．次の式はフーリエの反転公式と呼ばれる．

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\boldsymbol{R}^1} e^{ix\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)d\xi. \tag{1.2}$$

これは美しい式であるのみならず解析学において極めて有用である．公式 (1.2) の証明が最初の目標である．まず重要な計算の例から始めよう．

補題 1.1.1　$t > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cdot\xi} e^{-t\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

証明　$e^{ix\cdot\xi}$ をテイラー (Taylor) 展開し，積分と無限和を交換する．奇関数を $\boldsymbol{R}^1$ 上で積分すれば 0 になることに注意すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cdot\xi} e^{-t\xi^2} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n} e^{-t\xi^2} d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{(2n)!} t^{-n-1/2} \Gamma(n+1/2)$$

であるが，ガンマ関数の公式

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

を使えば補題が得られる． □

上の補題で行った積分と無限和の交換を保証しよう．ルベーグ積分論において基本になるのは，正値単調増加関数列に対しては極限と積分の順序交換が自由に行えることである．

定理 1.1.2（ベッポ・レビ (Beppo-Levi) の定理） I を区間とし，$f_n(x) \in L^1(I), n = 1, 2, \cdots$ は I 上で

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots, \quad \text{a.e.}$$

を満たすとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

が次の意味で成り立つ．

(1) 左辺が有限な値に収束するならば $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は I 上殆どいたるところ収束し，$f(x) \in L^1(I)$ であって，上の等式が成り立つ．

(2) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が I 上殆どいたるところ収束し，$f(x) \in L^1(I)$ ならば，上の等式の左辺は収束し，かつ等号が成り立つ．

この定理を無限和に対して言い換えると次のようになる．

定理 1.1.3 I を区間とし，$f_n(x) \in L^1(I), n = 1, 2, \cdots$ は I 上で $f_n(x) \geq 0$ a.e. を満たすとする．このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx$$

が次の意味で成り立つ．

(1) 左辺が有限な値に収束するならば $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上殆どいたるところ収束し，$f(x) \in L^1(I)$ であって，上の等式が成り立つ．

(2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I 上殆どいたるところ収束し，$f(x) \in L^1(I)$ ならば，上の等式の左辺は収束し，かつ等号が成り立つ．

関数の正値性がないときには次のような定理になる．

定理 1.1.4（項別積分の定理） I を区間とし，$f_n(x) \in L^1(I), n = 1, 2, \cdots$ は $\sum_{n=1}^{\infty} \int_I |f_n(x)|dx < \infty$ を満たすとする．このとき $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I

上殆どいたるところ収束し，$f(x) \in L^1(I)$ であって

$$\int_I f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n(x)dx$$

が成り立つ．

これらの定理を補題 1.1.1 に適用しよう．$f_n(\xi) = (ix\xi)^n e^{-t\xi^2}/n!$ とおけば

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(\xi)|d\xi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^n e^{-t\xi^2} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x\xi|^n}{n!} e^{-t\xi^2} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{|x\xi|} e^{-t\xi^2} d\xi < \infty\end{aligned}$$

である．ここで定理 1.1.3 を次のように用いた．3 行目を見れば 2 行目の積分が収束することが分かる．そこで定理 1.1.2 により 2 行目の等号が成立する．$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\xi) = e^{ix\cdot\xi} e^{-t\xi^2}$ であるから，定理 1.1.4 により

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cdot\xi} e^{-t\xi^2} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\xi)d\xi$$

となり，積分と無限和の順序変更が許される．

補題 1.1.1 により e^{-tx^2} のフーリエ変換は $(2t)^{-1/2}e^{-\xi^2/(4t)}$ である．これに再び補題 1.1.1 を用いれば

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cdot\xi} \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\xi^2/(4t)} d\xi = e^{-tx^2}$$

となり，e^{-tx^2} に対してはフーリエの反転公式が成り立つことが分かる．

1.1.2 熱核に関する補題

補題 1.1.1 に現れた関数を用いて一般の可積分関数に対しても反転公式を示すことができる．そのためにルベーグ積分論から 2 つの定理を準備する．

定理 1.1.5 $1 \le p < \infty$ とし $f(x) \in L^p(\boldsymbol{R})$ なら

$$\lim_{y \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x+y) - f(x) \right|^p dx = 0.$$

この事実は本によっては定理として述べられていないこともあるが理論を展開するときに重要である．証明そのものは $f(x)$ を階段関数によって近似すれば難しくはない．次の定理は 2 重積分に関するものである．

定理 1.1.6（**フビニ** (**Fubini**) **の定理** (**I**)）　I, J を区間とし，$f(x,y) \in L^1(I \times J)$ とする．このとき a.e. $y \in J$ に対して，$f(x,y)$ は x の関数として I 上可積分であり，$g(y) = \int_I f(x,y)dx$ とおけば $g(y) \in L^1(J)$ である．さらに

$$\iint_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_J \left(\int_I f(x,y)dx\right) dy$$

が成り立つ．ここで左辺は 2 変数 x, y の関数としての積分であり，右辺は先に x で積分し，次に y で積分するという累次積分である．

定理 1.1.6 で x と y の役割を入れ換えれば，$f(x,y) \in L^1(I \times J)$ のとき

$$\int_J \left(\int_I f(x,y)dx\right) dy = \int_I \left(\int_J f(x,y)dy\right) dx$$

が成り立つことに注意しよう．次の定理もフビニの定理と呼ばれる．トネリ・ホブソン (Tonelli-Hobson) の定理と呼ばれることもある．

定理 1.1.7（**フビニの定理** (**II**)）　I, J を区間とし $f(x,y)$ は a.e $y \in J$ に対して x の関数として I 上可積分であり，さらに $\int_I |f(x,y)|dx$ は y に関して J 上可積分とする．このとき $f(x,y) \in L^1(I \times J)$ であり

$$\iint_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_J \left(\int_I f(x,y)dx\right) dy = \int_I \left(\int_J f(x,y)dy\right) dx$$

が成り立つ．

次の事実はフビニの定理の基礎となるものであるが，それ自身も使われるのでここで述べておく．E を $\boldsymbol{R}^2$ の可測集合とし，$y \in E$ に対して $E_y = \{x\,;\,(x,y) \in E\}$ を E の y での切り口という．

補題 1.1.8　E が $\boldsymbol{R}^2$ での零集合のとき，1 次元の零集合 F が存在し，$y \notin F$ のとき E_y は 1 次元の零集合である．

さて $t > 0$ として

$$U_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)} \tag{1.3}$$

という関数を考えよう．これは**熱核** (heat kernel) とも呼ばれる重要な関数である．次の式が成り立つことに注意しよう．

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_t(x)dx = 1. \tag{1.4}$$

図 1.1 は熱核の概形を図示したものである．

補題 1.1.9　$1 \le p < \infty$ とし，$f(x) \in L^p(\boldsymbol{R})$ とする．

$$f_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U_t(x-y)f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} U_t(y)f(x-y)dy$$

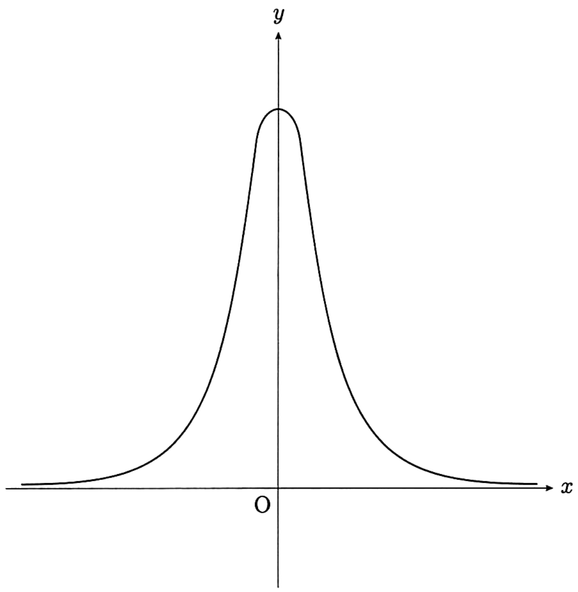


図 1.1　熱核.

とおけば，$t \to 0$ のとき $\|f_t - f\|_{L^p(\boldsymbol{R})} \to 0$ である.

証明　まず $f_t(x)$ を定義する積分が絶対収束していることを示す. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ によって q を定義すれば，ヘルダーの不等式（定理 A.1.1）によって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|U_t(y) f(x-y)\right| dy \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} U_t(y)^q dy\right)^{1/q} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^p dy\right)^{1/p}$$

であるから，左辺の積分は収束する．さて (1.4) によって

$$f_t(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U_t(y)\big(f(x-y) - f(x)\big) dy$$

と変形できる．$U_t(y) = U_t(y)^{1/q} U_t(y)^{1/p}$ として（これは簡単だが役に立つ技巧である）ヘルダーの不等式と (1.4) を用いれば

$$\left|f_t(x) - f(x)\right|^p \le \int_{-\infty}^{\infty} U_t(y) \left|f(x-y) - f(x)\right|^p dy$$

である．この式の両辺を x で積分する．ミンコフスキーの不等式（定理 A.1.2）により $\left|f(x-y) - f(x)\right|^p$ は x に関して $\boldsymbol{R}$ 上で可積分で

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x-y) - f(x)\right|^p dx \le (2\|f\|_p)^p \tag{1.5}$$

である．定理 1.1.7 を用いれば，右辺において x に関する積分を先に行うことができ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f_t(x) - f(x)\right|^p dx \le \int_{-\infty}^{\infty} U_t(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x-y) - f(x)\right|^p dx\right) dy$$

が成り立つ．定理 1.1.5 から，任意に与えられた $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存

在し

$$\sup_{|y|<\delta}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x-y)-f(x)\right|^p dx<\epsilon$$

となる．そこで y に関する積分を $|y|<\delta$ と $|y|>\delta$ の 2 つの範囲に分ければ，(1.5) により

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_t(x)-f(x)\right|^p dx\le\epsilon\int_{|y|<\delta}U_t(y)dy+(2\|f\|_p)^p\int_{|y|>\delta}U_t(y)dy$$

となる．右辺第 1 項は ϵ でおさえられる．右辺第 2 項は $y^2=4tz$ とおけば

$$\int_{|y|>\delta}U_t(y)dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\delta^2/(4t)}^{\infty}\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}dz$$

となり，$t\to 0$ のとき 0 となることが分かる．□

1.1.3 反転公式の証明

登場が遅れたが，ルベーグ積分論の中の最も基本的な定理は次の定理である．

定理 1.1.10（ルベーグの収束定理） I を区間とし $f_n(x)\in L^1(I)$, $n=1,2,\cdots$ はある $f(x)$ に I 上殆どいたるところ収束するものとする．$|f_n(x)|\le F(x)$ a.e. がすべての n に対して成り立つような $F(x)\in L^1(I)$ が存在するならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)dx=\int_I f(x)dx$$

が成り立つ．

さてフーリエの反転公式を証明しよう．

定理 1.1.11 $f(x)\in L^1(\boldsymbol{R})$ かつ $\widehat{f}(\xi)\in L^1(\boldsymbol{R})$ なら

$$f(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi.$$

証明 $t>0$ とし

$$f_t(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\cdot\xi}e^{-t\xi^2}\widehat{f}(\xi)d\xi$$

を考える．右辺にフーリエ変換の定義 (1.1) を代入すれば

$$f_t(x)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\cdot\xi-t\xi^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iy\cdot\xi}f(y)dy\right)d\xi$$

である．$|e^{i(x-y)\dot{\xi}-t\xi^2}f(y)|=e^{-t\xi^2}|f(y)|$ を y に関して $\boldsymbol{R}^1$ 上で積分すれば $e^{-t\xi^2}\|f\|_1$ であり，これはさらに ξ に関して $\boldsymbol{R}^1$ 上で積分可能である．よって定理 1.1.7 によって累次積分を行うことができ，補題 1.1.1 を用いれば

$$f_t(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi - t\xi^2} d\xi \right) f(y) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} U_t(x-y) f(y) dy$$

となる．補題 1.1.9 によって

$$\lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f_t(x) - f(x) \right| dx = 0 \tag{1.6}$$

である．一方 $e^{ix\cdot\xi} e^{-t\xi^2} \widehat{f}(\xi) \to e^{ix\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)$ であり，また $\left| e^{ix\cdot\xi} e^{-t\xi^2} \widehat{f}(\xi) \right| \leq \left| \widehat{f}(\xi) \right| \in L^1(\boldsymbol{R})$ である．よって定理 1.1.10 により各点収束の意味で

$$\lim_{t \to 0} f_t(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cdot\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi \tag{1.7}$$

である．(1.6) からは $f_t(x)$ が $f(x)$ に各点収束することは一般には従わないのだが，適当な部分列 $t_1 > t_2 > \cdots \to 0$ をとれば $f_{t_n}(x)$ が $f(x)$ に殆どいたるところ収束することが分かる．これもルベーグ積分の基本知識である．以上によって定理が示された． □

系 1.1.12 $f(x) \in L^1(\boldsymbol{R})$ のフーリエ変換が恒等的に 0 ならば f も 0 である．

定理 1.1.11 の証明中で使った事実を定理として述べよう．次の定理も基本知識である．

定理 1.1.13 $1 \leq p < \infty$, I を区間とし $f_n \in L^p(I)$ は $\|f_n - f\|_{L^p(I)} \to 0$ を満たすとする．このとき $\{f_n\}$ の適当な部分列 $\{f_{n'}\}$ をとれば $f_{n'} \to f$ a.e. on I となる．

ルベーグ積分論の主要な定理が次々と登場したが，これらは非常によく用いられる定理であり，途中の論法もごく基本的なものである．この節は何度か読み返して定理の使い方に慣れる必要がある．

1.2 基本的性質

1.2.1 関数の減少度と滑らかさ

重要な例を 1 つ示す．区間 I の特性関数を $\chi_I(x)$ とする．

例 1.2.1 $I = (a, b)$ のとき

$$\widehat{\chi_I}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i(a+b)\xi/2} \frac{\sin\left((b-a)\xi/2\right)}{\xi} .$$

特に $I = (-\lambda, \lambda)$ として

$$\widehat{\chi_I}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lambda\xi)}{\xi} .$$

計算は演習問題としよう．$\chi_I(x)$ は不連続であるが，$\widehat{\chi_I}(\xi)$ は有界，連続で $|\xi| \to \infty$ のとき，$\widehat{\chi_I}(\xi) \to 0$ である．さらに $\widehat{\chi_I}(\xi)$ は無限回微分可能で，解析的ですらある．これらはフーリエ変換の持つ特徴である．

定理 1.2.2 $f(x) \in L^1(\boldsymbol{R})$ のとき $\widehat{f}(\xi)$ は有界，連続である．

証明 定義から

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-1/2}\|f\|_1, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R} \tag{1.8}$$

であるから，$\widehat{f}(\xi)$ は有界である．$\xi_n \to \xi$ のとき $e^{ix\cdot\xi_n}f(x) \to e^{ix\cdot\xi}f(x)$, $|e^{ix\cdot\xi_n}f(x)| = |f(x)| \in L^1(\boldsymbol{R})$ であるから，ルベーグの収束定理により $\widehat{f}(\xi_n) \to \widehat{f}(\xi)$ となり，$\widehat{f}(\xi)$ は連続である．□

次の補題はリーマン (Riemann)・ルベーグ (Lebesgue) の補題と呼ばれる．

補題 1.2.3（リーマン・ルベーグ） $f(x) \in L^1(\boldsymbol{R})$ のとき $\displaystyle\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

証明 任意に与えられた $\epsilon > 0$ に対して，ある階段関数 $g(x)$ が存在し $\|f-g\|_1 < \epsilon$ である．(1.8) により $|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{g}(\xi)| + (2\pi)^{-1/2}\epsilon$ であるが，階段関数は区間の特性関数の 1 次結合であるから，例 1.2.1 により $\displaystyle\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{g}(\xi) = 0$. よって $\displaystyle\limsup_{|\xi|\to\infty} |\widehat{f}(\xi)| \leq \epsilon$ である．$\epsilon > 0$ は任意にとれるから $\displaystyle\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ である．□

$f(x)$ の微分可能性が高くなれば $\widehat{f}(\xi)$ の無限遠点での減少度は増し，$f(x)$ の無限遠点での減少度が増せば $\widehat{f}(\xi)$ の微分可能性は高くなる．それを示すのに 2 つ準備が必要である．

補題 1.2.4 $f(x) \in L^1((0,\infty))$ なら $\displaystyle\liminf_{x\to\infty} x|f(x)| = 0$.

証明 $\displaystyle\liminf_{x\to\infty} x|f(x)| \geq 2C_0 > 0$ なら $R > 0$ が存在し，$x > R$ において $x|f(x)| > C_0$ である．これは $f(x) \in L^1((0,\infty))$ に反する．□

定理 1.2.5（積分記号下での微分） I を任意の区間，$J = (a,b)$ を開区間とし $I \times J$ 上で定義された $f(x,t)$ は

(a) 任意の $t \in J$ を固定するごとに $f(x,t) \in L^1(I)$,

(b) 任意の $x \in I$ を固定するごとに $f(x,t) \in C^1(J)$,

(c) I 上で可積分な関数 $G(x)$ が存在して

$$\left|\partial_t f(x,t)\right| \leq G(x), \quad \forall (x,t) \in I \times J$$

が成り立つとする．ただし $\partial_t = \partial/\partial t$ である．このとき $\displaystyle F(t) = \int_I f(x,t)dx$ は J 上で 1 回連続的微分可能であり

$$F'(t) = \int_I \partial_t f(x,t)dx$$

となる．

定理 1.2.6 $f(x) \in C^n(\boldsymbol{R})$ が $f^{(k)}(x) \in L^1(\boldsymbol{R})$, $0 \leq k \leq n$ を満たせばある定数 $C > 0$ に対して $\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq C(1+|\xi|)^{-n}$ が成り立つ．

証明 部分積分により

$$\int_a^b e^{-ix\cdot\xi} f'(x)dx = \left[e^{-ix\cdot\xi} f(x)\right]_a^b + i\xi \int_a^b e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$$

である．補題 1.2.4 によりある点列 $a_1 > a_2 > \cdots \to -\infty$, $b_1 < b_2 < \cdots \to \infty$ が存在し $f(b_n) \to 0$, $f(a_n) \to 0$ となるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot\xi} f'(x)dx = i\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$$

となる．同様にして

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot\xi} f^{(k)}(x)dx = (i\xi)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx, \quad 0 \leq k \leq n$$

が得られる．これから直ちに定理が得られる． □

定理 1.2.7 ある整数 $n \geq 1$ に対して $(1+|x|)^n f(x) \in L^1(\boldsymbol{R})$ なら $\widehat{f}(\xi) \in C^n(\boldsymbol{R})$ であり

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^k \widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot\xi}(-ix)^k f(x)dx, \quad 0 \leq k \leq n.$$

証明 $|(\partial_\xi)^k e^{-ix\cdot\xi} f(x)| = |x^k f(x)| \in L^1(\boldsymbol{R})$ だから定理 1.2.5 により $\widehat{f}(\xi)$ の定義において ξ に関して積分記号下で微分してよい． □

$f(x)$ にそのフーリエ変換を対応させる写像（無限次元空間における線形写像は**線形作用素**と呼ばれることが多い）を $\mathcal{F}$ と書こう:

$$\left(\mathcal{F}f\right)(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\boldsymbol{R}} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx. \tag{1.9}$$

上の 2 つの定理の証明の中で

$$\mathcal{F} : \frac{d}{dx} f(x) \to i\xi \widehat{f}(\xi), \tag{1.10}$$

$$\mathcal{F} : xf(x) \to i\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi), \tag{1.11}$$

という事実が示されていることに注意しよう．

1.2.2 合成積とフーリエ変換

$f(x), g(x) \in L^1(\boldsymbol{R})$ のとき

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \tag{1.12}$$

を f と g の**合成積** (convolution) という．この積分の収束を保証するために

最初は $f(x)$ が有界と仮定しよう．次の補題の証明の中で単に $f(x), g(x)$ が $\boldsymbol{R}$ 上可積分という仮定の下で，積分 (1.12) が殆どいたるところの x に対して絶対収束していることを示す．変数変換 $x-y=y'$ により

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy=\bigl(g*f\bigr)(x) \tag{1.13}$$

である．$L^1(\boldsymbol{R})$ の関数と $L^p(\boldsymbol{R})$ の関数との合成積を考えることもある．

補題 1.2.8 $f(x)\in L^1(\boldsymbol{R}),\ g(x)\in L^p(\boldsymbol{R}),\ 1\le p<\infty$ のとき

$$\|f*g\|_{L^p(\boldsymbol{R})}\le \|f\|_{L^1(\boldsymbol{R})}\cdot\|g\|_{L^p(\boldsymbol{R})}.$$

証明 これは補題 1.1.9 の証明の中の議論と本質的に同じなのだが念のために繰り返そう．まず $f(x)$ が有界かつ L^1 と仮定する．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\cdots=\int\cdots$ と略記する．$p>1$ の場合に示す．$p=1$ の場合も同様なのだがもっと簡単である．$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ によって q を定義する．$|f(x-y)|=|f(x-y)|^{1/q}|f(x-y)|^{1/p}$ とすればヘルダーの不等式によって

$$\int|f(x-y)g(y)|dy\le\left(\int|f(x-y)|dy\right)^{1/q}\left(\int|f(x-y)||g(y)|^p dy\right)^{1/p}$$

であるから（$p=1$ の場合は右辺第 1 項を 1 とする），$f(x)$ が有界であることより $f*g$ を定義する積分は絶対収束している．両辺を p 乗して積分する．右辺では x に関して先に積分すれば

$$\begin{aligned}\int\left(\int|f(x-y)g(y)|dy\right)^p dx&\le\|f\|_1^{p/q}\int|g(y)|^p\left(\int|f(x-y)|dx\right)dy\\&=\|f\|_1^{1+p/q}\int|g(y)|^p dy\end{aligned}$$

となり，x で先に積分し，次に y で積分したものは絶対収束している．よってフビニの定理により積分順序を変更することができて，上の計算は正当化され

$$\|f*g\|_p^p\le\|f\|_1^{1+p/q}\|g\|_p^p$$

となるから補題が示された．

$f(x)$ が有界でない場合に上の計算を見直してみる．積分

$$\int|g(y)|^p\left(\int|f(x-y)|dx\right)dy$$

は収束するから，フビニの定理により y に関して先に積分してよい．従って特に a.e. x に対して積分 $\displaystyle\int|f(x-y)||g(y)|^p dy$ は収束している．すると上で述べたヘルダーの不等式により

$$\int\left(\int|f(x-y)g(y)|dy\right)^p dx\le\|f\|_1^{1+p/q}\|g\|_p{}^p$$

となる．よって左辺の積分は有限な値となるから，$f*g$ を定義する積分 (1.12)

は殆どいたるところの x に対して絶対収束し有限な値となっている．このことを考慮して上の証明を読み返せば，補題は $f(x) \in L^1(\boldsymbol{R})$ という仮定の下で成り立っている． □

定理 1.2.9 $f(x), g(x) \in L^1(\boldsymbol{R})$ のとき

$$(\widehat{f * g})(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi).$$

証明 形式的に計算すれば

$$\begin{aligned}
\int e^{-ix\cdot\xi}\big(f * g\big)(x)dx &= \iint e^{-i(x-y)\cdot\xi} e^{-iy\cdot\xi} f(x-y)g(y)dxdy \\
&= \int e^{-iy\cdot\xi} g(y) \left(\int e^{-i(x-y)\cdot\xi} f(x-y)dx\right) dy \\
&= \left(\int e^{-iy\cdot\xi} g(y)dy\right)\left(\int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx\right)
\end{aligned}$$

であるが，積分はすべて絶対収束しているからフビニの定理により上のように積分順序を変えてよい． □

定理 1.2.10 $f, g, \widehat{g} \in L^1(\boldsymbol{R})$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot\xi} f(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)d\eta.$$

証明 g に対してフーリエの反転公式が成り立つから $g(x)$ は有界連続であることに注意する．このときフビニの定理と反転公式によって

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)d\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot(\xi-\eta)} f(x)dx\right) \widehat{g}(\eta)d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot\xi} f(x) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cdot\eta}\widehat{g}(\eta)d\eta\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot\xi} f(x)g(x)dx
\end{aligned}$$

となり定理が成り立つ． □

1.3 急減少関数

$\boldsymbol{R}^1$ 上で可積分な関数のフーリエ変換は必ずしも $\boldsymbol{R}^1$ 上で可積分ではない．例えば有界な区間の特性関数のフーリエ変換は $\boldsymbol{R}^1$ 上可積分ではない．実際，例 1.2.1 を見れば次の補題を示せばよい．

補題 1.3.1 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx = \infty$.

証明 $N > 0$ を大きくとれば

$$\int_0^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \geq \sum_{n=1}^{N} \int_{(n+1/4)\pi}^{(n+3/4)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx$$

$$\geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{(n+1/4)\pi}^{(n+3/4)\pi} \frac{1}{x} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{N} \log \frac{1+3/(4n)}{1+1/(4n)}$$

である．

$$\frac{1+3/(4n)}{1+1/(4n)} = \left(1+\frac{3}{4n}\right)\left(1-\frac{1}{4n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

であり，$\log(1+x) = x + O(x^2)$ であるから

$$\sum_{n=1}^{N} \log \frac{1+3/(4n)}{1+1/(4n)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \to \infty$$

となる． □

ローラン・シュワルツ (Laurent Schwartz) はフーリエ変換に関して不変で，かつフーリエ変換に伴う演算が自由に行え，しかもこのような性質を持つ最小と思われる関数空間を提唱した．これは急減少関数の空間，あるいは Schwartz' space of rapidly decreasing functions とも呼ばれ，後に導入する超関数のフーリエ変換のための重要な基礎である．

定義 1.3.2（急減少関数の空間） $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ とは任意の $m, N > 0$ に対して定数 $C_{mN} > 0$ が存在し

$$\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^m \varphi(x)\right| \leq C_{mN}(1+|x|)^{-N}, \quad \forall x \in \boldsymbol{R}$$

が成り立つような $\varphi(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ 全体である．

例えば $e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ である．$\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1) \subset L^p(\boldsymbol{R}), 1 \leq p < \infty$ となることも分かる．次の補題はこの定義から直ちに従うので，証明を試みられたい．

補題 1.3.3 $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ なら，任意の $n > 0$ に対して $\varphi^{(n)}(x) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$, $(1+x^2)^n \varphi(x) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ である．

急減少関数空間での収束は次のように定義する．

$$p_n(\varphi) = \sup_{x \in \boldsymbol{R}} (1+|x|^2)^n \sum_{r=0}^{n} \left|\varphi^{(r)}(x)\right|, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.14}$$

とおき

$$\varphi_j \to \varphi \quad \text{in} \quad \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1) \Longleftrightarrow \lim_{j \to \infty} p_n(\varphi_j - \varphi) = 0, \quad \forall n \geq 0 \tag{1.15}$$

と定義する．p_n はセミノルム (semi-norm) と呼ばれるもので

$$0 \le p_n(a\varphi + b\psi) \le |a|p_n(\varphi) + |b|p_n(\psi), \quad a, b \in \boldsymbol{C}$$

という性質を持っている．

定理 1.3.4 $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ は次の意味で完備である．$\{\varphi_j\}$ が $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ でのコーシー (Cauchy) 列，即ち

$$\lim_{j,k\to\infty} p_n(\varphi_j - \varphi_k) = 0, \quad \forall n \ge 0 \tag{1.16}$$

ならば，ある $\varphi \in (\boldsymbol{R}^1)$ が唯 1 つ存在し，$\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ が成り立つ．

証明 $p_0(\varphi - \varphi_k) = \sup_{x\in\boldsymbol{R}^1} |\varphi_j(x) - \varphi_k(x)| \to 0$ であるから，$\{\varphi_j\}$ は $\boldsymbol{R}^1$ 上一様収束している．よって $\varphi(x) \in C(\boldsymbol{R})$ が存在し，$p_0(\varphi_j - \varphi) \to 0$ である．$|\varphi_j^{(n)}(x) - \varphi_k^{(n)}(x)| \le p_n(\varphi_j - \varphi_k) \to 0$ であるから，φ_j のすべての導関数も一様収束している．よって $\varphi \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ であり，$\varphi_j^{(n)}(x)$ は $\varphi^{(n)}(x)$ に一様収束している．n を 1 つ固定する．任意の $\epsilon > 0$ に対して $N > 0$ が存在し，$j, k > N$ のとき

$$(1 + |x|^2)^n \sum_{r=0}^{n} \left| \varphi_j^{(r)}(x) - \varphi_k^{(r)}(x) \right| \le \epsilon$$

がすべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して成り立つ．ここで $k \to \infty$ とすれば

$$(1 + |x|^2)^n \sum_{r=0}^{n} \left| \varphi_j^{(r)}(x) - \varphi^{(r)}(x) \right| \le \epsilon$$

であるから $p_n(\varphi_j - \varphi) \le \epsilon, \forall j > N$. これは定義により $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ を意味する．□

$C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1)$ は $\boldsymbol{R}^1$ の中で有界な台を持ち，無限回微分可能な関数全体とする．$C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1) \subset \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1) \subset L^p(\boldsymbol{R}^1)$ であり，$C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1)$ は $L^p(\boldsymbol{R}^1)$ の中で稠密であるから（このことはよく知られているが念のため補遺 A.2 で説明する），次の定理は直ちに分かる．

定理 1.3.5 $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ は $L^p(\boldsymbol{R}^1)$ $(1 < p < \infty)$ の中で稠密である．即ち任意の $f \in L^p(\boldsymbol{R}^1)$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して $\varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ が存在し $\|f - \varphi\|_{L^p(\boldsymbol{R}^1)} < \epsilon$ が成り立つ．

次の定理を述べるために少し準備をする．$\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ から $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ への作用素 T が $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ の意味で連続とは $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ なら $T\varphi_j \to T\varphi$ in $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ となることである．$\mathcal{F}$ は (1.9) で定義されたものとする．$\boldsymbol{R}_x^1$ と $\boldsymbol{R}_\xi^1$ はともに $\boldsymbol{R}^1$ なのだが，変数として x, ξ を使う，という意味である．

定理 1.3.6 (1) $\varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ に対してフーリエの反転公式が成り立つ．

(2) $\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}_x^1)$ から $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}_\xi^1)$ への 1 対 1，全射であり，$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ ともに $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ の意味で連続である．

(3) $\varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1_\xi)$ に対して

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right)(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\boldsymbol{R}} e^{ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi.$$

証明 $\varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ のとき 任意の n に対して $(1+|x|)^n\varphi(x) \in L^1(\boldsymbol{R}^1)$ であるから，定理 1.2.7 により $\widehat{\varphi}(\xi) \in C^k(\boldsymbol{R}^1), \forall k$ である．定理 1.2.6 を用いれば $|\widehat{\varphi}^{(k)}(\xi)| \le C_{kn}(1+|\xi|)^{-n}$ も分かり，$\widehat{\varphi}(\xi) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ である．これより特に $\widehat{\varphi}(\xi) \in L^1(\boldsymbol{R})$ であるから定理 1.1.11 によってフーリエの反転公式が成り立つ．$\mathcal{F}$ が 1 対 1 であることは系 1.1.12 から分かる．全射であることを示すために $\psi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}_\xi)$ に対して

$$\check{\psi}(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\boldsymbol{R}} e^{ix\cdot\xi}\psi(\xi)d\xi = \widehat{\psi}(-x)$$

とおけばフーリエの反転公式によって

$$\psi(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\boldsymbol{R}} e^{-ix\cdot\xi}\check{\psi}(x)dx = \mathcal{F}\check{\psi}$$

であるから $\mathcal{F}$ は全射である．(3) はフーリエの反転公式から従う．定理 1.2.6, 1.2.7 により $(d/dx)^n\big(x^k\varphi(x)\big)$ のフーリエ変換から $\xi^n\widehat{\varphi}^{(k)}(\xi)$ が得られる．これより

$$p_n(\widehat{\varphi}) \le C_n p_{n+2}(\varphi)$$

となり，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ から $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ への連続写像である．$\mathcal{F}^{-1}$ も同様である．
□

上の証明の中でも用いたが，任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ と $k \ge 0$ に対して

$$\left(\mathcal{F}D_x^k\varphi\right)(\xi) = \xi^k\left(\mathcal{F}\varphi\right)(\xi), \tag{1.17}$$

$$\left(\mathcal{F}x^k\varphi\right)(\xi) = (-D_\xi)^k\left(\mathcal{F}\varphi\right)(\xi) \tag{1.18}$$

$(D_x = -id/dx)$ が成り立つ．

1.4 熱方程式

直線状の物質の位置座標 x の点の時刻 t における温度を $u(t,x)$ とおく．時刻 0 における温度分布を $f(x)$ とすれば $u(t,x)$ は微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t>0), \qquad u(0,x) = f(x) \tag{1.19}$$

を満たす．ただし本来は物質の線密度，比熱，熱伝導度などの物理的定数を含んでいるのであるが，簡単のためにこれらの定数を 1 とした．気体や液体の中を拡散する物質の濃度も同じ方程式に従う．そのため，(1.19) は**熱方程式**，あ

るいは**拡散方程式**と呼ばれる．この方程式を発見法的に解いてみよう．$u(t,x)$ を x に関してフーリエ変換したものを $\widehat{u}(t,\xi)$ とすればフーリエ変換は x に関する微分を $i\xi$ をかけるという掛け算作用素に変えるから，$\widehat{u}(t,\xi)$ は

$$\frac{d}{dt}\widehat{u}(t,\xi) = -\xi^2\widehat{u}(t,\xi) \quad (t>0), \quad \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{f}(\xi) \tag{1.20}$$

という常微分方程式を満たす．これを解いて $\widehat{u}(t,\xi) = e^{-t\xi^2}\widehat{f}(\xi)$ となるからフーリエの反転公式により

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\boldsymbol{R}^1} e^{ix\cdot\xi}e^{-t\xi^2}\widehat{f}(\xi)d\xi \tag{1.21}$$

となる．このままでもよいのだが，さらに $\widehat{f}(\xi)$ を積分で表示して

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1}\int_{\boldsymbol{R}^2} e^{i(x-y)\cdot\xi}e^{-t\xi^2}f(y)d\xi dy$$

とし，ξ に関する積分を先に行って補題 1.1.1 を用いれば

$$u(t,x) = (4\pi t)^{-1/2}\int_{\boldsymbol{R}^1} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}f(y)dy \tag{1.22}$$

が得られる．(1.3) に現れた熱核を用いて

$$u(t,x) = (U_t * f)(x) = \int_{\boldsymbol{R}^1} U_t(x-y)f(y)dy \tag{1.23}$$

とも書ける．

$f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ のときには (1.22) や (1.21) の表示を正当化できる．実際 $f(y), \widehat{f}(\xi)$ ともに可積分だから積分は絶対収束している．積分記号下での微分に関する定理（定理 2.5）により $u(t,x)$ は $t>0$, $x \in \boldsymbol{R}$ に関して無限回微分可能である．(1.22) で積分記号下での微分を実際に行って $u(t,x)$ は方程式 (1.19) を満たすことが分かる．あるいは (1.21) を使う方がもっと簡単である．ルベーグの収束定理により $\lim_{t\to 0} u(t,x) = f(x)$ となることが分かるから，$u(t,x)$ は $t=0$ までこめて連続で初期条件 $u(0,x)=f(x)$ を満たす．

実は (1.22) の式では表せない (1.19) の解も存在する．熱方程式の解がどのような条件下で一意的であるかは興味深い問題なのだがここではふれないことにする．

初期値 $f(x)$ に対して時刻 t での解の値 $u(t,x)$ を対応させる作用素を $U(t)$ と書く．$U(t)$ は $U(0)=I$（恒等作用素）を満たし，さらに

$$U(t)U(s) = U(t+s), \quad t,s>0 \tag{1.24}$$

を満たす．実際 (1.21) により $U(t)f$ のフーリエ変換は $e^{-t\xi^2}\widehat{f}(\xi)$ であるから，$U(t+s)f$ のフーリエ変換を $e^{-(t+s)\xi^2}\widehat{f}(\xi) = e^{-t\xi^2}\left(e^{-s\xi^2}\widehat{f}(\xi)\right)$ と考えればよい．性質 (1.24) と $U(0)=I$ を持つ作用素 $U(t)$ を半群 (semi-group) と呼ぶ．これは確率論にも現れる重要な性質である．

1.5 L^2 でのフーリエ変換

この節ではフーリエ変換の定義を $L^2(\boldsymbol{R})$ の関数にまで拡張する．そのための鍵になるのが次の補題である．$L^2(\boldsymbol{R})$ の内積を (,) と書く:

$$(f,g) = \int_{\boldsymbol{R}} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

補題 1.5.1 $\varphi, \phi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ のとき $(\varphi, \phi) = (\widehat{\varphi}, \widehat{\phi})$.

証明 フーリエの反転公式とフビニの定理により

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{R}} \varphi(x)\overline{\phi(x)}\,dx &= \int_{\boldsymbol{R}} \varphi(x)\overline{\left((2\pi)^{-1/2}\int_{\boldsymbol{R}} e^{ix\cdot\xi}\widehat{\phi}(\xi)\,d\xi\right)}\,dx \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} \left((2\pi)^{-1/2}\int_{\boldsymbol{R}} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\,dx\right)\overline{\widehat{\phi}(\xi)}\,d\xi \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\phi}(\xi)}\,d\xi\end{aligned}$$

であるから補題が成り立つ． □

この補題より特に

$$\|\varphi\|_{L^2(\boldsymbol{R})} = \|\widehat{\varphi}\|_{L^2(\boldsymbol{R})}, \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}) \tag{1.25}$$

が成り立つ．$\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ は $L^2(\boldsymbol{R})$ で稠密であるから，任意の $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対して $\|\varphi_n - f\|_{L^2(\boldsymbol{R})} \to 0$ を満たす $\varphi_n \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ が存在する．(1.25) により $\|\varphi_m - \varphi_n\|_{L^2(\boldsymbol{R})} = \|\widehat{\varphi}_m - \widehat{\varphi}_n\|_{L^2(\boldsymbol{R})} \to 0$ であるから $\widehat{\varphi}_n(\xi)$ はある $g(\xi) \in L^2(\boldsymbol{R})$ に $L^2(\boldsymbol{R})$ の意味で収束する．即ち $\|\widehat{\varphi}_n - g\|_{L^2(\boldsymbol{R})} \to 0$. $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ を近似する他の急減少関数列 $\{\phi_n\}$ があったとする．φ_n, ϕ_n を交互に並べてできる列を $\{\psi_n\}$ とすれば ψ_n は f に $L^2(\boldsymbol{R})$ の意味で収束する．従って $\widehat{\psi}_n$ も $L^2(\boldsymbol{R})$ の意味のコーシー列である．コーシー列の極限はその部分列をとっても同じだから $\{\widehat{\varphi}_n\}$ と $\{\widehat{\phi}_n\}$ は同じ $L^2(\boldsymbol{R})$ の元に収束する．よって上に現れた $g(\xi)$ は $f(x)$ のみによって定まり，f を近似する急減少関数列の取り方によらない．これを $f(x)$ の L^2 の意味のフーリエ変換と定義する．

定理 1.5.2 $f, g \in L^2(\boldsymbol{R})$ のとき

$$(f,g) = (\widehat{f}, \widehat{g}), \tag{1.26}$$

$$\|f\|_{L^2(\boldsymbol{R})} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\boldsymbol{R})}. \tag{1.27}$$

証明 $f, g \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対して $\|\varphi_n - f\|_{L^2(\boldsymbol{R})} \to 0$, $\|\phi_n - g\|_{L^2(\boldsymbol{R})} \to 0$ を満たす $\varphi_n, \phi_n \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ をとる．コーシー・シュワルツの不等式により

$$\begin{aligned}|(\varphi_n, \phi_n) - (f,g)| &= |(\varphi_n - f, \phi_n) + (f, \phi_n - g)| \\ &\le |(\varphi_n - f, \phi_n)| + |(f, \phi_n - g)|\end{aligned}$$

$$\le \|\varphi_n - f\| \cdot \|\phi_n\| + \|f\| \cdot \|\phi_n - g\|$$

となるが，右辺第 2 項は 0 に収束する．不等式

$$|\|\varphi_m\| - \|\varphi_n\|| \le \|\varphi_m - \varphi_n\|$$

に注意すれば $\{\varphi_n\}$ が $L^2(\boldsymbol{R})$ の意味のコーシー列であるとき，$\{\|\varphi_n\|\}$ は実数のコーシー列，従って特に有界であることが分かる．よって $\|\varphi_n - f\| \cdot \|\phi_n\| \to 0$ となり，補題 1.5.1 を用いれば

$$(\widehat{\varphi}_n, \widehat{\psi}_n) - (f, g) = (\varphi_n, \psi_n) - (f, g) \to 0$$

であるから (1.26) が示された．(1.27) は (1.26) で $f = g$ とすればよい． □

等式 (1.26), (1.27) をプランシェレル (Plancherel) の等式，またはパーセバル (Parseval) の等式という．

$f \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対してそのフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ を対応させる写像を $\mathcal{F}$ で表そう．

定理 1.5.3 $\mathcal{F}$ は $L^2(\boldsymbol{R})$ から $L^2(\boldsymbol{R})$ への 1 対 1, 上への写像であり，かつ内積を変えない: $(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) = (f, g)$.

証明 $\mathcal{F}$ の値域が $L^2(\boldsymbol{R})$ 全体であることを示せばよい．$g(\xi) \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対して $\|\psi_n - g\|_{L^2(\boldsymbol{R})} \to 0$ となる $\psi_n(\xi) \in \mathcal{S}$ をとる．$\varphi_n = \mathcal{F}^{-1}\psi_n$ とおけば定理 1.3.6 により $\varphi_n(x) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ であり，

$$\|\varphi_m - \varphi_n\|_{L^2} = \|\psi_m - \psi_n\|_{L^2} \to 0$$

より φ_n はある $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ に $L^2(\boldsymbol{R})$ の意味で収束する．

$$\|\varphi_n - f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}\varphi_n - \mathcal{F}f\|_{L^2} = \|\psi_n - \mathcal{F}f\|_{L^2} \to 0$$

であるから，$g = \mathcal{F}f$ となる． □

定理 1.5.3 に述べた性質を持つ作用素をユニタリー (unitary) 作用素という．

第 2 章
解析関数とフーリエ変換

フーリエ変換と解析関数には深い関係がある．この章ではそのうちの初等的な部分を解説する．

2.1 コーシーの積分公式とフーリエ変換

$\varphi(z)$ が単連結領域 $D \subset \boldsymbol{C}$ 上で正則であれば，D 内の任意の点 z と z の周りを 1 周する D 内の曲線 C に対して

$$\int_C \varphi(z)dz = 0, \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

が成り立つ．フーリエの反転公式はこのコーシー (Cauchy) の積分公式からも導くことができる．$f = u + iv \in C^1(D)$ がコーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすことは $\overline{\partial}$-方程式

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

を満たすことと同値であることに注意しよう．

補題 2.1.1 $f(x) \in L^1(\boldsymbol{R})$ の台が有界のとき $\widehat{f}(\xi)$ は $\boldsymbol{C}$ 全体で正則な関数に解析接続される．

証明 $|x| > R$ のとき $f(x) = 0$ であるものとし，$z \in \boldsymbol{C}$ に対して

$$g(z) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-R}^{R} e^{-ixz}f(x)dx$$

とおく．$g(z)$ が $\boldsymbol{C}$ 全体で正則であることを示せば，$g(\xi) = \widehat{f}(\xi), \forall\xi \in \boldsymbol{R}$ であるから補題が示される．$D_a = \{z \in \boldsymbol{C}\,; |\mathrm{Im}\, z| < a\}$ とする．$z = t + i\tau$ とおくと

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}e^{-ixz}f(x)\right| \le Re^{aR}\big|f(x)\big|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \tau}e^{-ixz}f(x)\right| \le Re^{aR}\big|f(x)\big|$$

であり，$\partial e^{-ixz}/\partial\overline{z} = 0$ であるから積分記号下での微分の定理により $z \in D_a$ において $\partial g(z)/\partial\overline{z} = 0$ である．a は任意であるから，$g(z)$ は $\boldsymbol{C}$ 全体で正則である． □

$\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ に対して

$$\psi_+(z) = \int_0^\infty e^{-ixz}\varphi(x)dx, \quad \psi_-(z) = \int_{-\infty}^0 e^{-ixz}\varphi(x)dx$$

とおく．部分積分により

$$\psi_+(z) = \frac{\varphi(0)}{iz} - \frac{\varphi'(0)}{z^2} - \int_0^\infty \frac{e^{-ixz}}{z^2}\varphi''(x)dx$$

であるから $\operatorname{Im} z \le 0$, $|z| \to \infty$ のとき

$$\psi_+(z) = \frac{\varphi(0)}{iz} + O(|z|^{-2})$$

となる．同様に

$$\psi_-(z) = \frac{\varphi(0)}{-iz} + \frac{\varphi'(0)}{z^2} - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-ixz}}{z^2}\varphi''(x)dx$$

であるから $\operatorname{Im} z \ge 0$, $|z| \to \infty$ のとき

$$\psi_-(z) = \frac{\varphi(0)}{-iz} + O(|z|^{-2})$$

となる．$C_R^\pm = \{-R \le x \le R\} \cup \{Re^{i\theta}\,;\, 0 \le \pm\theta \le \pi\}$ という積分路を考えると $\psi_\pm(z)$ は $\boldsymbol{C}$ 全体で正則であるから

$$0 = \int_{C_R^-} \psi_+(z)dz = -\int_{-R}^R \psi_+(x)dx + \pi\varphi(0) + O(1/R),$$
$$0 = \int_{C_R^+} \psi_-(z)dz = \int_{-R}^R \psi_-(x)dx - \pi\varphi(0) + O(1/R)$$

となる．$\psi(\xi) = \psi_+(\xi) + \psi_-(\xi)$ とおけばこれより

$$\int_{-\infty}^\infty \psi(\xi)d\xi = 2\pi\varphi(0)$$

が得られる．$\phi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ と $x_0 \in \boldsymbol{R}$ に対して $\varphi(x) = \phi(x + x_0)$ とおけば

$$\phi(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{ix_0\cdot\xi}\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-iy\cdot\xi}\phi(y)dy\right)d\xi$$

となり，フーリエの反転公式が示された．

フーリエ変換を具体的に計算する際にコーシーの積分定理が有効な場合がある．まず次のことに注意しよう．定理 1.5.2 より $\|\widehat{f}\|_{L^2(\boldsymbol{R})} = \|f\|_{L^2(\boldsymbol{R})}$ である．従って $\|f_n - f\|_{L^2(\boldsymbol{R})} \to 0$ なら $\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_{L^2(\boldsymbol{R})} \to 0$ である．そこで

$f \in L^2(\boldsymbol{R})$ だが $f \notin L^1(\boldsymbol{R})$ であるような f のフーリエ変換を計算するには f を $L^2(\boldsymbol{R})$ の意味で近似する $f_n \in L^1(\boldsymbol{R}) \cap L^2(\boldsymbol{R})$ をとり $\widehat{f_n}$ の極限として $\widehat{f}$ を求めればよい．

補題 2.1.2　$f(x) \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} (2\pi)^{-1/2} \int_{-n}^{n} e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx =: g(\xi)$$

が $\boldsymbol{R}$ 上殆どいたるところ収束するならば，$g(\xi)$ は $f(x)$ の L^2 の意味のフーリエ変換である．

証明　$f(x) \in L^2(\boldsymbol{R})$ であるからコーシー・シュワルツの不等式によって積分 $\displaystyle\int_{-n}^{n} e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx$ は絶対収束することに注意しよう．$\chi_n(x)$ を区間 $(-n, n)$ の特性関数とすると，$\chi_n(x) f(x)$ は $f(x)$ に $L^2(\boldsymbol{R})$ の意味で収束するから，$g_n := \mathcal{F}(\chi_n f)$ は $\widehat{f}$ に $L^2(\boldsymbol{R})$ の意味で収束する．定理 1.1.13 により，適当な部分列 $n_1 < n_2 < \cdots \to \infty$ をとれば $g_{n_i}(\xi)$ は $\widehat{f}(\xi)$ に殆どいたるところ収束している．一方 $g_{n_i}(\xi)$ は $g(\xi)$ に殆どいたるところ収束しているから，$g(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ である．□

例 2.1.3　(1)　$a < 0$ のとき

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x+ia}\right) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} i\, e^{-a\xi} & (\xi < 0), \\ 0 & (\xi > 0). \end{cases}$$

(2)　$a > 0$ のとき

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x+ia}\right) = \begin{cases} -\sqrt{2\pi} i\, e^{-a\xi} & (\xi > 0), \\ 0 & (\xi < 0). \end{cases}$$

(1) を示そう．$a < 0, \xi < 0$ のときコーシーの積分公式によって

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{-ix\cdot\xi}}{x+ia} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{-i\xi Re^{i\theta}}}{Re^{i\theta}+ia} iRe^{i\theta} d\theta = 2\pi i e^{-a\xi}$$

である．$|e^{-i\xi Re^{i\theta}}| = e^{\xi R \sin\theta}$ は $0 \le \theta \le \pi$ において有界で $R \to \infty$ のとき，$e^{\xi R\sin\theta} \to 0$ となることからルベーグの定理によって

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ix\cdot\xi}}{x+ia} dx = 2\pi i e^{-a\xi}, \quad a < 0, \quad \xi < 0$$

となる．$\xi > 0$ のときには下半平面で積分することにより

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ix\cdot\xi}}{x+ia} dx = 0, \quad a < 0, \quad \xi > 0$$

となる．

例 2.1.4 $a > 0$ のとき $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{x^2+a^2}\right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{e^{-a|\xi|}}{a}$.

これは例 2.1.3 と

$$\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{2ia}\left(\frac{1}{x-ia} - \frac{1}{x+ia}\right)$$

から示される.

同様にして次の例が得られる. 計算は演習問題としよう.

例 2.1.5 $\boldsymbol{C} \setminus [0,\infty) \ni z = re^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$ に対して $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ とおけば

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^2 - z}d\xi = \frac{i}{2\sqrt{z}}e^{i\sqrt{z}|x|}.$$

2.2 整関数に対するペーリー・ウィーナーの定理*

$\boldsymbol{C}$ 全体で正則な関数を整関数という. D が複素平面 $\boldsymbol{C}$ の中の開き φ の角領域であるとは, ある $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$D = \{z \in \boldsymbol{C}\,; \alpha < \arg z < \alpha + \varphi\}$$

となることである. 角領域 D で正則な関数 $g(z)$ が指数型 σ とは, D において

$$\limsup_{|z|\to\infty} \frac{\log|g(z)|}{|z|} = \sigma$$

となることである. 特に $D = \boldsymbol{C}$ のとき $g(z)$ を指数型 σ の整関数であるという. $f(x) \in L^1(\boldsymbol{R})$ の台が $|x| \le \sigma$ の範囲にあるときそのフーリエ変換は指数型 $\le \sigma$ の整関数である. これは

$$|\widehat{f}(z)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} |f(x)|dx\, e^{\sigma|\mathrm{Im}\, z|} \tag{2.1}$$

であることから容易に従う.

次の補題はフラグメン・リンデレーフ (Phragmén-Lindelöf) の補題として知られている.

補題 2.2.1 D は角領域でその開きは π より小さいものとする. $g(z)$ が D の中で指数型の正則関数であり, D の境界までこめて連続, さらに境界上で $|g(z)| \le M$ を満たすならば D の中でも $|g(z)| \le M$ を満たす. ここで M は定数である.

証明 $0 < \varphi < \pi/2$ とし

$$D = \{z \in \boldsymbol{C}\,; -\varphi < \arg z < \varphi\}$$

としてよい. 定数 $\rho > 1$ を $\rho\varphi < \pi/2$ となるようにとり, $\epsilon > 0$ に対して

$g_\epsilon(z) = g(z)\exp(-\epsilon z^\rho)$ とおく．$g(z)$ が指数型であるから r_0 を十分大きくとれば $\log|g(z)| \le \sigma|z|, |z| > r_0$ となる．ここで σ は $g(z)$ の指数型 σ_0 より大きければ何でもよい．よって $z = re^{i\theta}$ とすると $|g_\epsilon(z)| \le e^{\sigma r} e^{-\epsilon r^\rho \cos\rho\theta}$ となる．$0 < \rho\varphi < \pi/2$ であるから，ある $\delta > 0$ に対して $\epsilon\cos(\rho\theta) \ge \delta$．よって $\sigma r - \epsilon r^\rho \cos\rho\theta < \sigma r - \delta r^\rho$ となる．$\rho > 1$ であるから，$r_1 > r_0$ を大きくとれば $r > r_1$ で $|g_\epsilon(z)| \le M$ となる．一方 D の境界上では $|g_\epsilon(z)| \le |g(z)| \le M$ である．よって領域 $D \cap \{|z| \le r_1\}$ で最大値の原理を用いることにより，$|g_\epsilon(z)| \le M$ が D 全体で成り立つことが分かる．よって $|g(z)| \le Me^{\epsilon|z|^\rho}$ であるから，$\epsilon \to 0$ として $|g(z)| \le M$ が D 上で成り立つ． □

次の定理はペーリー・ウィーナー (Paley-Wiener) の定理と呼ばれ，コンパクトな台を持つ関数のフーリエ変換を特徴づけるものである．

定理 2.2.2 $g(z)$ を整関数，$\sigma > 0$ を定数とするとき次の (1), (2) は同値である．

(1) $\operatorname{supp} f(x) \subset \{|x| \le \sigma\}$ である $f(x) \in L^2(\boldsymbol{R})$ が存在し，$g(\xi) = \widehat{f}(\xi)$, a.e. on $\boldsymbol{R}$.

(2) $g(\xi) \in L^2(\boldsymbol{R})$ であり，定数 $C > 0$ が存在して $|g(z)| \le Ce^{\sigma|\operatorname{Im} z|}, \forall z \in \boldsymbol{C}$.

証明 (1) が成り立てば

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-ix\xi} f(x)dx, \quad \xi \in \boldsymbol{R}$$

であるが，両辺ともに $\boldsymbol{C}$ 全体で正則であるから，一致の定理により，$\xi \in \boldsymbol{R}$ を $z \in \boldsymbol{C}$ にしても成り立つ．(2.1) により (2) が分かる．

(2) $\Longrightarrow$ (1) を示す．$x > \sigma$ を固定し，$h(z) = g(z)e^{ixz}$ とおく．$h(z)$ は指数型であり，実軸と正の虚軸上で有界である．補題 2.2.1 を第 1 象限，第 2 象限にそれぞれ適用して，$h(z)$ が上半平面で有界であることが分かる．$\epsilon > 0$ に対して $h_\epsilon(z) = h(z)/(1 - i\epsilon z)^2$ とおけばコーシーの積分定理により

$$\int_{-R}^{R} h_\epsilon(\xi)d\xi + \int_0^\pi h_\epsilon(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta$$

である．$R \to \infty$ として

$$f_\epsilon(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cdot\xi} \frac{g(\xi)}{(1 - i\epsilon\xi)^2} d\xi = 0 \quad (x > \sigma) \tag{2.2}$$

が得られる．$g(\xi)(1 - i\epsilon\xi)^{-2}$ は $g(\xi)$ に $L^2(\boldsymbol{R})$ で収束するから，$f(x)$ を $g(\xi)$ のフーリエ逆変換とすれば $f_\epsilon(x)$ は $f(x)$ に $L^2(\boldsymbol{R})$ の意味で収束する．(2.2) より $x > \sigma$ で $f(x) = 0$ である．下半平面で $g(z)e^{ixz}$ を考えることにより $f(x) = 0$ $(x < -\sigma)$ も示される． □

$C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ のフーリエ変換の特徴づけも得られる．

定理 2.2.3 $g(z)$ を整関数，$\sigma > 0$ を定数とするとき次の (1), (2) は同値である．

(1) $\operatorname{supp} f(x) \subset \{|x| \le \sigma\}$ である $f(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ が存在し，$\boldsymbol{R}$ 上で $g(\xi) = \widehat{f}(\xi)$.

(2) 任意の $N > 0$ に対して定数 $C_N > 0$ が存在し

$$|g(z)| \le C_N(1+|z|)^{-N} e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}, \quad \forall z \in \boldsymbol{C}.$$

証明 $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{2n} e^{ixz} = (-z^2)^n e^{ixz}$ を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} f(x)dx = \Big(-\frac{1}{z^2}\Big)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} f^{(2n)}(x)dx$$

となることから．(1) $\Longrightarrow$ (2) が分かる．(2) が成り立てば定理 2.2.2 によって $g(\xi)$ のフーリエ逆変換 $f(x)$ の台は $\{|x| \le \sigma\}$ の中にある．(2) により $f(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ である． □

2.3 ハーディ空間*

$\boldsymbol{C}_+ = \{z = x+iy\,; x \in \boldsymbol{R},\ y > 0\}$ を上半平面とし，$1 \le p < \infty$ とする．$\mathcal{H}^p(\boldsymbol{C}_+)$ を $\boldsymbol{C}_+$ で正則で

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx < \infty$$

を満たす $f(z)$ 全体とする．$\mathcal{H}^p(\boldsymbol{C}_+)$ をハーディ (Hardy) 空間と呼ぶ．以下，$p = 2$ の場合を考えよう．

定理 2.3.1 任意の $\delta > 0$ に対し $f \in \mathcal{H}^2(\boldsymbol{C}_+)$ は $\operatorname{Im} z \ge \delta$ において有界であり，さらに

$$\sup_{\operatorname{Im} z \ge L} |f(z)| \to 0, \quad L \to \infty. \tag{2.3}$$

また任意の $0 < \delta < M$ に対し

$$\sup_{\delta < y < M} |f(x+iy)| \to 0, \quad |x| \to \infty. \tag{2.4}$$

証明 $0 < \rho < \delta$ となる ρ をとる．$\operatorname{Im} z \ge \delta$ ならコーシーの積分定理により

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\theta})d\theta$$

である．両辺に ρ をかけて ρ に関して 0 から $\delta/2$ まで積分すれば

$$\frac{\delta^2}{8} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta/2}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\theta})\rho d\rho d\theta$$

となる．コーシー・シュワルツの不等式により

$$\frac{\delta^2}{8}|f(z)| \le \frac{\delta}{4\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\delta/2} \int_0^{2\pi} |f(z+\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta \right)^{1/2} \tag{2.5}$$

であるが，$z = x + iy$ とおけば

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta/2} \int_0^{2\pi} |f(z+\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta &\le \int_{y-\delta/2}^{y+\delta/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(s+it)|^2 ds \\ &\le \delta \sup_{t>0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(s+it)|^2 ds \end{aligned}$$

であるから $|f(z)| \le C\delta^{-1/2}$ という不等式が得られる．ここで定数 C は δ によらず，また z が $\operatorname{Im} z \ge \delta$ を満たす限り z にもよらない．よってまず $f(z)$ は $\operatorname{Im} z \ge \delta$ で有界である．また上の式は $\sup_{\operatorname{Im} z \ge L} |f(z)| \le CL^{-1/2}$ がすべての $L \ge 1$ に対して成り立つことも意味するから (2.3) が成り立つ．また $\delta < y < M$ のときは (2.5) より

$$|f(x+iy)|^2 \le C_\delta \int_{\delta/2}^{M+\delta/2} dt \int_{x-\delta/2}^{x+\delta/2} |f(s+it)|^2 ds$$

が得られる．$|x| \to \infty$ のとき s に関する積分は 0 に収束するから，ルベーグの定理によりこれは $|x| \to \infty$ で 0 に近づく．よって (2.4) が示された． □

ハーディ空間の元は次のようなポアッソン (Poisson) の積分表示を持つ．

$$f(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} ds, \quad y > 0. \tag{2.6}$$

この式を発見的に導こう．$f(x+iy)$ は正則だから調和であり

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x+iy) = 0$$

が成り立つ．$f(x+iy)$ を $g(x,y)$ と書き，$g(x,y)$ の x に関するフーリエ変換を $\widehat{g}(\xi, y)$ とおけば

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \xi^2 \right) \widehat{g}(\xi, y) = 0$$

である，これを解いて $\widehat{g}(\xi, y) = C_1(\xi) e^{-|\xi| y} + C_2(\xi) e^{|\xi| y}$ となるが，$g(x,y) \to 0$ $(y \to \infty)$ であるから，$C_2(\xi) = 0$ であろう．よって $\widehat{g}(\xi, y) = \widehat{g}(\xi, 0) e^{-|\xi| y}$ であり

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \widehat{g}(\xi, 0) e^{-|\xi| y} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y}{(x-s)^2 + y^2} g(s) ds \end{aligned}$$

となる．ここで例 2.1.4 より

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{-a|\xi|} d\xi = \frac{2a}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$$

となることを使った．これより (2.6) が従う．

上の計算を直接正当化するのは困難である．そこで次のような迂回路をとる．

補題 2.3.2 $f(x+iy) \in \mathcal{H}^2(\boldsymbol{C}_+)$ と $\delta > 0$ に対して

$$f(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s+i\delta)\frac{y-\delta}{(x-s)^2+(y-\delta)^2}ds, \quad y > \delta.$$

証明 $A, B > 0$ をとり長方形 $[-A, A] \times [\delta, B]$ においてコーシーの積分公式を考えれば

$$\begin{aligned} 2\pi i f(x+iy) = & \int_{-A}^{A} \frac{f(s+i\delta)}{s-x+i(\delta-y)}ds - \int_{-A}^{A} \frac{f(s+iB)}{s-x+i(B-y)}ds \\ & + i\int_{\delta}^{B} \frac{f(A+it)}{A-x+i(t-y)}dt - i\int_{\delta}^{B} \frac{f(-A+it)}{-A-x+i(t-y)}dt \end{aligned}$$

$(-A < x < A, \delta < y < B)$ である．定理 2.3.1 により $A \to \infty$ とすれば

$$2\pi i f(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s+i\delta)}{s-x+i(\delta-y)}ds - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s+iB)}{s-x+i(B-y)}ds$$

となる．右辺第 2 項はコーシー・シュワルツの不等式とハーディ空間の定義により

$$C\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(s-x)^2+(B-y)^2}\right)^{1/2} = \frac{C}{B-y}$$

でおさえられるから $B \to \infty$ として 0 に収束する．よって

$$f(x+iy) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s+i\delta)}{s-x+i(\delta-y)}ds, \quad y > \delta \tag{2.7}$$

である．一方 $y' = 2\delta - y$ ととれば $y' < \delta$ であるから，長方形 $[-A, A] \times [\delta, B]$ においてコーシーの積分定理を考えることにより

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{-A}^{A} \frac{f(s+i\delta)}{s-x+i(\delta-y')}ds - \int_{-A}^{A} \frac{f(s+iB)}{s-x+i(B-y')}ds \\ & + i\int_{\delta}^{B} \frac{f(A+it)}{A-x+i(t-y')}dt - i\int_{\delta}^{B} \frac{f(-A+it)}{-A-x+i(t-y')}dt \end{aligned}$$

となる．これに上と同様の計算をほどこせば

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s+i\delta)}{s-x-i(\delta-y)}ds. \tag{2.8}$$

(2.7) から (2.8) をひけば補題が得られる． □

次の補題は関数解析的な考え方を必要とするので補遺で証明する（定理 A.3.2）．

補題 2.3.3 $L^2(\boldsymbol{R})$ の任意の有界な無限列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，部分列 $\{f_{n'}\}$ と $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ が存在し，任意の $g \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対して $(f_{n'}, g) \to (f, g)$ となる．

ポアッソンの積分表示を導こう．

定理 2.3.4 (1) $f(x+iy) \in \mathcal{H}^2(\boldsymbol{C}_+)$ に対して $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ が存在し

$$f(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\frac{y}{(x-s)^2+y^2}ds, \quad y>0.$$

(2) $y \to 0$ のとき $\|f(\cdot+iy) - f(\cdot)\|_{L^2(\boldsymbol{R})} \to 0$.

証明 $\delta_n = 1/n$, $f_n(s) = f(s+i\delta_n)$ とおく．$\{f_n\}$ は $L^2(\boldsymbol{R})$ の有界列であるから補題 2.3.3 により部分列 $f_{n'}$ と $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ が存在し，任意の $g \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対して $(f_{n'}, g) \to (f, g)$ となる．

$$g_n(s) = \frac{y-\delta_n}{(x-s)^2+(y-\delta_n)^2},$$
$$g(s) = \frac{y}{(x-s)^2+y^2}$$

とおけば $\|g_n - g\| \to 0$ である．よって

$$(f_{n'}, g_{n'}) = (f_{n'}, g_{n'} - g) + (f_{n'}, g) \to (f, g)$$

であるから，補題 2.3.2 より (1) が従う．

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-s)^2+y^2}ds = 1$$

であるから

$$\begin{aligned} f(x+iy) - f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{\pi\big((s-x)^2+y^2\big)}\big(f(s)-f(x)\big)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi\big(z^2+1\big)}\big(f(x+yz)-f(x)\big)dz \end{aligned}$$

となり

$$|f(x+iy)-f(x)|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi\big(z^2+1\big)}|f(x+yz)-f(x)|^2dz$$

と評価できる．$y \to 0$ のとき

$$\int_{|z|<M}\frac{1}{\pi(z^2+1)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+yz)-f(x)|^2dx\right)dz \to 0$$

であり，$M \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned} &\int_{|z|>M}\frac{1}{\pi(z^2+1)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+yz)-f(x)|^2dx\right)dz \\ &\le C\int_{|z|>M}\frac{1}{\pi(z^2+1)}dz \to 0 \end{aligned}$$

であるから (2) が示される．□

定理 2.3.4 での $f(x)$ を $f(x+iy)$ の境界値と呼ぶ．証明は省略するがファトゥー (Fatou) の定理と呼ばれる次の定理が成り立つことが知られている．例えば参考文献 [4], p.128 を見られたい．

定理 2.3.5 $f \in \mathcal{H}^p(\boldsymbol{C}_+)$ のとき a.e. $x \in \boldsymbol{R}$ に対して極限

$$f(x) = \lim_{y \to 0} f(x+iy)$$

が存在する.

2.4 上半平面におけるペーリー・ウィーナーの定理*

$\mathcal{H}^2(\boldsymbol{C}_+)$ の元の境界値はフーリエ変換の台によって特徴づけられる. この節の目標は定理 2.4.2 である.

定理 2.4.1 $f(x+iy) \in \mathcal{H}^2(\boldsymbol{C}_+)$ とその境界値 $f(x)$ の x に関する (L^2 の意味での) フーリエ変換を $\widehat{f}(\xi, y)$, $\widehat{f}(\xi)$ とすれば, $y > 0$ のとき

$$\widehat{f}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi) e^{-y\xi} \quad \text{a.e.} \quad \xi \in \boldsymbol{R} \tag{2.9}$$

である. さらに

$$\widehat{f}(\xi) = 0, \quad \xi < 0 \tag{2.10}$$

が成り立つ.

証明 $a > 0$, $0 < y_1 < y_2$ を任意にとり, 長方形 $[-a, a] \times [y_1, y_2]$ の周囲に沿って $f(z)e^{-i\xi z}$ を積分すればコーシーの積分定理により

$$\begin{aligned} &\int_{-a}^{a} f(x+iy_1) e^{-i\xi(x+iy_1)} dx + i \int_{y_1}^{y_2} f(a+iy) e^{-i\xi(a+iy)} dy \\ &- \int_{-a}^{a} f(x+iy_2) e^{-i\xi(x+iy_2)} dx - i \int_{y_1}^{y_2} f(-a+iy) e^{-i\xi(-a+iy)} dy = 0 \end{aligned}$$

である. $(2\pi)^{-1/2} e^{-|\xi| y_2}$ をかけて $a \to \infty$ とする. 定理 2.3.1 により左辺第 2, 4 項は 0 に, 第 1, 3 項はそれぞれ $\widehat{f}(\xi, y_2) e^{\xi y_1} e^{-|\xi| y_2}$, $\widehat{f}(\xi, y_2) e^{\xi y_2} e^{-|\xi| y_2}$ に L^2 の意味で収束するから, $\widehat{f}(\xi, y_1) e^{\xi y_1} = \widehat{f}(\xi, y_2) e^{\xi y_2}$ が成り立つ. 正確には y_1, y_2 を固定するごとに ξ の L^2 関数として等しいという意味である. そこで y_1 を固定し

$$E = \{(\xi, y)\,;\, \widehat{f}(\xi, y) e^{\xi y} \neq \widehat{f}(\xi, y_1) e^{\xi y_1}\}$$

とおくと, E は 2 次元の零集合である. よって補題 1.1.8 により 1 次元の零集合 $F \subset \boldsymbol{R}$ が存在して $\xi \notin F$ のとき $E_\xi = \{y > 0\,;\, (\xi, y) \in E\}$ は 1 次元の零集合である. $\widehat{f_1}(\xi) = \widehat{f}(\xi, y_1) e^{\xi y_1}$ とおくと $\xi \notin F$ のとき $\widehat{f}(\xi, y) = \widehat{f_1}(\xi) e^{-\xi y}$ a.e. $y > 0$ であるが, 零集合上での値を修正することによりすべての $y > 0$ に対して等号が成り立つとしてよい. 即ち,

$$\widehat{f}(\xi, y) = \widehat{f_1}(\xi) e^{-\xi y}, \quad \forall y > 0, \quad \xi \notin F$$

である. 定理 1.5.2 により任意の $y > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f_1}(\xi)|^2 e^{-2\xi y} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dx$$

であるから，任意の $\delta > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{-\delta} |\widehat{f_1}(\xi)|^2 d\xi \leq e^{-2\delta y} \int_{-\infty}^{-\delta} |\widehat{f_1}(\xi)|^2 e^{-2\xi y} d\xi$$
$$\leq e^{-2\delta y} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f_1}(\xi)|^2 e^{-2\xi y} d\xi \leq Ce^{-2\delta y}$$

となる．$y \to \infty$ とすれば $\xi < -\delta$ で $\widehat{f_1}(\xi) = 0$. $\delta > 0$ は任意であるから $\xi < 0$ で $\widehat{f_1}(\xi) = 0$ となる．定理 1.5.2 と定理 2.3.4 (2) により

$$\|f(x+iy) - f(x)\| = \|\widehat{f}(\xi, y) - \widehat{f}(\xi)\| \to 0, \quad y \to 0$$

である．$\xi < 0$ のとき $\widehat{f}(\xi, y) = \widehat{f_1}(\xi)e^{-\xi y} = 0$ より $\widehat{f}(\xi) = 0$ となる．また $y \to 0$ として $\widehat{f}(\xi) = \widehat{f_1}(\xi)$ も分かる．これにより定理が示された． □

定理 2.4.2 $f(x) \in L^2(\boldsymbol{R})$ がある $f(x+iy) \in \mathcal{H}^2(\boldsymbol{C}_+)$ の境界値であるための必要十分条件は $\widehat{f}(\xi) = 0$, $\xi < 0$ となることである．

証明 必要性は定理 2.4.1 で示した．$\widehat{f}(\xi) = 0$, $\xi < 0$ と仮定する．

$$f(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi(x+iy)} d\xi, \quad y > 0 \tag{2.11}$$

とおけば定理 1.2.5 により $f(x+iy)$ は $y > 0$ で正則である．パーセバルの等式により任意の $y > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dx = \int_0^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-2\xi y} d\xi \leq \int_0^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

であるから $f(x+iy) \in \mathcal{H}^2(\boldsymbol{C}_+)$ である．$f(x+iy)$ の境界値を $f_1(x)$ とすれば，定理 2.4.1 より $f(x+iy)$ の x に関するフーリエ変換は $\widehat{f}(\xi, y) = \widehat{f_1}(\xi)e^{-\xi y}$ である．一方 (2.11) より $\widehat{f}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi)e^{-\xi y}$ であるから，$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f_1}(\xi)$ となり，$f(x) = f_1(x)$ である． □

第 3 章
1変数の超関数

1 変数の場合に超関数を定義する.

3.1 定義と簡単な例

$I = (a, b)$ を $\boldsymbol{R}$ 内の開区間とする. $-\infty < a < b < \infty$ という有限区間の場合, $a = -\infty, b = 0$ あるいは $a = 0, b = \infty$ という半無限区間の場合, あるいは $a = -\infty, b = \infty$, 即ち $I = \boldsymbol{R}$ の場合が考えられるがいずれも重要である. $C_0^\infty(I)$ とは I 内にコンパクトな台を持つ無限回微分可能関数全体である. 詳しくは $\varphi(x) \in C_0^\infty(I)$ とは $\varphi(x)$ が I 上無限回微分可能であり, $a < c < d < b$ を満たす有限な定数 c, d が存在して, $\varphi(x) = 0$, $x \notin [c, d]$ を満たすことである. c, d は φ ごとに違ってもよい. シュワルツ (L. Schwartz) に倣って

$$\mathcal{D}(I) = C_0^\infty(I) \tag{3.1}$$

とおこう. $\mathcal{D}(I)$ 上の**線形汎関数**とは $\mathcal{D}(I)$ から $\boldsymbol{C}$ への線形写像 (作用素) のことである. 一般に関数を変数とする関数, あるいは無限次元空間で定義された関数を汎関数と呼んでいる. 線形汎関数 T が $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ においてとる値を $T(\varphi)$ と書いたり, $\langle T, \varphi \rangle$ と書いたりする. この本では後者に従う. T が線形とは

$$\langle T, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\langle T, \varphi \rangle + \beta\langle T, \psi \rangle, \quad \forall\varphi, \psi \in \mathcal{D}(I), \quad \forall\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$$

が成り立つことである. $T = 0$ とは $\langle T, \varphi \rangle = 0, \forall\varphi \in \mathcal{D}(I)$ となることである. $K \subset I$ を満たす有界閉区間 K を I 内のコンパクト区間という.

$$C_0^\infty(K) = \{\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}); \operatorname{supp} \varphi \subset K\}$$

とおく.

定義 3.1.1 I を $\boldsymbol{R}$ 内の開区間とする. T が I 上の**超関数**であるとは, T が

$\mathcal{D}(I)$ 上の線形汎関数であり，かつ任意のコンパクト区間 $K \subset I$ に対して定数 C_K と 0 以上の整数 $k = k_K$ が存在し

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sup_{x \in K} \sum_{0 \leq m \leq k} |\varphi^{(m)}(x)|, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K) \tag{3.2}$$

が成り立つことである．I 上の超関数全体を $\mathcal{D}'(I)$ で表す．

シュワルツは超関数という言葉を用いずに distribution と命名した．$\mathcal{D}'$ はそこから来るものであろう．訳語も（超）分布とすべきだったかもしれないが，今日では超関数，時にはシュワルツ超関数と呼ばれている．通常の関数は超関数である．「通常の」関数という意味を明確にするために次の定義をしよう．

定義 3.1.2 I を $\boldsymbol{R}$ 内の開区間とする．$f(x)$ が I 上で局所可積分であるとは，任意のコンパクト区間 $K \subset I$ に対して $\int_K |f(x)|dx < \infty$ が成り立つことである．I 上局所可積分な関数全体を $L^1_{loc}(I)$ で表す．

ヘルダーの不等式により $L^p(I) \subset L^1_{loc}$, $1 \leq p \leq \infty$ であるから積分論で用いられる関数は $L^1_{loc}(I)$ に属することが分かるであろう．

例 3.1.3 $f \in L^1_{loc}(I)$ のとき

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_I f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

で定義される T_f は I 上の超関数である．

T_f が $\mathcal{D}(I)$ 上の線形汎関数であることは明らかである．K を I 内のコンパクト区間とし $C_K = \int_K |f(x)|dx$ とおけば

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq C_K \sup_{x \in K} |\varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K)$$

であるから (3.2) も成り立ち，T_f は I 上の超関数である．以下，$L^1_{loc}(I)$ に属する関数をしばしば通常の関数と呼ぶ．2 つの関数 $f, g \in L^1_{loc}(I)$ が通常の関数として等しいということと f, g の定める超関数 T_f, T_g が超関数として等しいこととは同値である．

補題 3.1.4 $f, g \in L^1_{loc}(I)$ のとき

$$T_f = T_g \Longleftrightarrow f(x) = g(x) \quad \text{a.e.} \quad \text{in} \quad I.$$

証明 $f - g$ を f と考えることにより，$g = 0$ の場合に示せばよい．

$\Longleftarrow$ は定義から直ちに分かる．逆を示すために I 内に任意にコンパクトな区間 $K = [c, d]$ をとり，$\delta > 0$ を $(c - \delta, d + \delta) \subset I$ となるようにとる．補遺 A.2 に説明するフリードリックスの軟化子 ρ_ϵ をとる．$\chi(x)$ を区間 $(c - \delta, d + \delta)$ の特性関数とし，$x \in K$ に対して

$$g_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\epsilon(x-y)\chi(y)f(y)dy$$

とおく．$\epsilon < \delta$, $x \in K$ のとき y の関数と見て $\rho_\epsilon(x-y) \in C_0^\infty(K)$ である．よって仮定により，$g_\epsilon(x) = 0$ $(x \in K)$ である．補題 A.2.2 (4) により g_ϵ は χf に L^1 の意味で収束する．従って $f(x) = 0$ a.e. on K が成り立つ．$K \subset I$ は任意にとれるから $f(x) = 0$ a.e. on I である． □

この補題により $L^1_{loc}(I) \subset \mathcal{D}'(I)$ と書いてよいであろう．即ち通常の関数のなす集合は超関数のなす集合の一部分である．$f \in L^1_{loc}(I)$ の定める超関数を上では T_f と書いていたが，以後特に断らない限り同じ記号 f で表す．即ち

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_I f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I) \tag{3.3}$$

と定義する．通常の関数ではない超関数の代表例が次のデルタ関数である．

例 3.1.5 I を任意の開区間とし，$a \in I$ とする．$\delta_a \in \mathcal{D}'(I)$ を

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

によって定義する．

任意のコンパクト区間 $K \subset I$ に対して $|\varphi(a)| \le \sup_{x \in K} |\varphi(x)|$ となるから，δ_a は I 上の超関数である．δ_a は通常の関数では表されない．実際，もしある $f \in L^1_{loc}(I)$ に対して $T_f = \delta_a$ となったとすると

$$\int_I f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

となる．話を分かり易くするために $I = (-1,1)$, $a = 0$ とし，$I_- = (-1,0)$, $I_+ = (0,1)$ としよう．このとき

$$\int_{I_\pm} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I_\pm)$$

であるから，補題 3.1.4 により，$f(x) = 0$ a.e. on $I_\pm$ である．よって $f(x) = 0$ a.e. on I となるから $T_f = 0$ であり矛盾が生ずる．

δ_a は通常の関数ではないのだが，あたかも通常の関数のように $\delta(x-a)$ と書かれることが多い．そして $\langle \delta_a, \varphi \rangle$ の値を通常の積分のように

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a)$$

と書く．積分区間は a を含むものであれば何でもいいのだが，余分な説明を省くためには $\boldsymbol{R}$ 全体にしておくのがよい．以後 $a = 0$ の場合，δ_0 を単に δ と書く．$\delta(x)$ という書き方もしばしば用いる．

3.2 超関数の微分

$f \in C^1(I)$ のとき

$$\int_I f'(x)\varphi(x)dx = -\int_I f(x)\varphi'(x)dx, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(I) \tag{3.4}$$

が成り立つ．そこで $T \in \mathcal{D}'(I)$ の微分 T' を

$$\langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(I)$$

によって定義する．高階微分も同様である．

定義 3.2.1 $T \in \mathcal{D}'(I)$ とし，n を 0 以上の整数とするとき

$$\langle T^{(n)}, \varphi\rangle = (-1)^n\langle T, \varphi^{(n)}\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(I)$$

によって $T^{(n)}$ を定義する．

T が (3.2) を満たすとき

$$|\langle T^{(n)}, \varphi\rangle| \leq C_K \sum_{m\leq k+n} |\varphi^{(m)}(x)|, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(K)$$

となるから，$T^{(n)}$ は I 上の超関数である．即ち超関数は無限回微分可能である（もちろん，超関数としてであるが）．$T^{(n)}$ を $(d/dx)^n T$ と書くこともある．

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m T^{(n)} = T^{(m+n)}$$

となることは定義から直ちに分かる．次の補題は (3.4) の言い換えである．

補題 3.2.2 $f \in C^1(I)$ のとき $(T_f)' = T_{f'}$.

この補題を考慮して以後通常の関数に対してもその微分を超関数の意味で行う．即ち $f \in L^1_{loc}(I)$ のとき

$$\langle f^{(n)}, \varphi\rangle = (-1)^n \int_I f(x)\varphi^{(n)}(x)dx, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(I)$$

と定義する．通常の関数は超関数の意味では無限回微分可能になる．$f \in C^n(I)$ のときはその超関数の意味での微分は f を古典的な意味で，即ち差分商の極限という意味で，微分した関数が定める超関数に等しい．

例 3.2.3 $H(x) = 1$ $(x \geq 0)$, $H(x) = 0$ $(x < 0)$ で定義される関数 $H(x)$ をヘビサイド (Heaviside) の関数という．

補題 3.2.4 $H'(x) = \delta(x)$.

証明 $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ に対して

$$\langle H', \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

である． □

$I \subset \boldsymbol{R}$ を開区間とする．$f \in C(I)$ の台（support）とは

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in I\,;\, f(x) \neq 0\}}$$

で定義される閉集合のことであった．ただし $A \subset \boldsymbol{R}$ に対して $\overline{A}$ は A の閉包（closure）を表す．$f \in L^1_{loc}(I)$ のときは $\operatorname{supp} f$ は次のように間接的に定義される：$x_0 \notin \operatorname{supp} f$ とは，ある $\epsilon > 0$ が存在し

$$\int_I f(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B(x_0, \epsilon))$$

が成り立つことである．ただし $B(x_0, \epsilon) = \{x \in I\,;\, |x - x_0| < \epsilon\}$ である．また $B(x_0, \epsilon) \subset I$ となることも仮定する．これにより次の定義が自然であることが分かる．

定義 3.2.5 $T \in \mathcal{D}'(I)$ に対して $x_0 \notin \operatorname{supp}(T)$ とはある $\epsilon > 0$ が存在し $B(x_0, \epsilon) \subset I$ であって

$$\langle T, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B(x_0, \epsilon))$$

が成り立つことである．

次の補題は定義 3.1.1 から容易に従う．

補題 3.2.6 $T \in \mathcal{D}'(I)$ がコンパクトな台を持てば 0 以上の整数 k が存在して

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sup_{x \in K} \sum_{0 \leq n \leq k} |\varphi^{(n)}(x)|, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K) \tag{3.5}$$

が任意のコンパクト区間 $K \subset I$ に対して成り立つ．

定義 3.1.1 における k はコンパクト区間 K の取り方に依存するのだが，(3.5) における k は K に無関係に定まることが重要である．(3.5) が成り立つような $T \in \mathcal{D}'(I)$ を有限階数を持つ超関数といい，(3.5) を成り立たせる最小の整数 k を T の**階数**という．

定義から直ちに分かるとおり $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$ である．次の定理はこのことの逆に近いものである．

定理 3.2.7 I は 0 を含む開区間とし，$T \in \mathcal{D}'(I)$ は $\operatorname{supp} T = \{0\}$ を満たすとする．このとき

$$T = \sum_{n=0}^{k} c_n \delta^{(n)} \tag{3.6}$$

と書ける．ただし k は T の階数で c_n $(0 \le n \le k)$ は定数である．

証明　まず定理の仮定の下で

$$\varphi \in \mathcal{D}(I), \quad \varphi^{(n)}(0) = 0, \quad 0 \le n \le k \Longrightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0 \tag{3.7}$$

が成り立つことを示そう．

$\rho(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ で $\operatorname{supp} \rho \subset (-2, 2)$ かつ $\rho(x) = 1$, $-1 < x < 1$ となるものをとる．$\rho_\epsilon(x) = \rho(x/\epsilon)$ とおく．$\operatorname{supp}(\rho_\epsilon(x) - 1)\varphi(x) \subset \{|x| > \epsilon\}$ であるから $\operatorname{supp} T = \{0\}$ より

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \rho_\epsilon \varphi \rangle \tag{3.8}$$

である．

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \rho^{(n)}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

であるが $n \ge 1$ のとき $\operatorname{supp} \rho^{(n)}(x/\epsilon) \subset \{1 \le |x/\epsilon| \le 2\}$ であるから

$$|\rho_\epsilon^{(n)}(x)| \le C_n |x|^{-n}, \quad \forall n \tag{3.9}$$

が成り立つ．ここで C_n は x にも ϵ にもよらない定数である．一方，テイラー展開により

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{k} \frac{x^m}{m!} \varphi^{(m)}(0) + x^{k+1} r_{k+1}(x), \tag{3.10}$$

$$r_k(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} \varphi^{(k+1)}(tx) dt \tag{3.11}$$

となる．よって $\varphi^{(m)}(0) = 0, 0 \le m \le k$ ならば

$$|\varphi^{(m)}(x)| \le C|x|^{k+1-m}, \quad 0 \le m \le k \tag{3.12}$$

となる．(3.9), (3.12) とライプニッツ (Leibnitz) の公式から

$$|\left(\rho_\epsilon(x)\varphi(x)\right)^{(m)}| \le C|x|^{k+1-m}, \quad 0 \le m \le k \tag{3.13}$$

である．ただし定数 C は ϵ によらない．しかも $\operatorname{supp} \rho_\epsilon(x)$ 上では $|x| < 2\epsilon$ であるから $\epsilon \to 0$ のとき

$$\sup_x \sum_{0 \le m \le k} |\left(\rho_\epsilon(x)\varphi(x)\right)^{(m)}| \to 0$$

である．よって (3.8), (3.5) により $\langle T, \varphi \rangle = 0$ となる．

定理を示す．$\rho_\epsilon(x)$ を上に与えたものとし，ϵ を小さくとって固定する．

$\rho_\epsilon(x) \in C_0^\infty(I)$ であり，$\rho_\epsilon(x) = 1$ $(|x| < \epsilon)$ である．$\varphi(x) \in C_0^\infty(I)$ に対して (3.10) により

$$\rho_\epsilon(x)\varphi(x) = \sum_{m=0}^{k} \frac{x^m}{m!}\rho_\epsilon(x)\varphi^{(m)}(0) + \rho_\epsilon(x)x^{k+1}r_{k+1}(x)$$

であるが (3.7) により

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{m=0}^{k} \left\langle T, \frac{x^m}{m!}\rho_\epsilon(x)\varphi^{(m)}(0) \right\rangle$$

よって $c_m = \left\langle T, \dfrac{x^m}{m!}\rho_\epsilon(x) \right\rangle$ とおけば定理が示される．□

超関数の意味の微分と通常の微分との違いを考えよう．$f(x)$ が区間 (a,b) 上で区分的に C^1-級とは点 $a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} = b$ が存在し，$I_k = (a_k, a_{k+1})$, $k = 0, 1, \cdots, n$ とおくと

$$f(x) \in C^1(I_k), \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

を満たすことである．さらに $f'(x) \in L^1(I_k)$, $k = 0, 1, \cdots, n$ と仮定すると $0 < \epsilon' < \epsilon$ のとき

$$\big|f(a_k + \epsilon) - f(a_k + \epsilon')\big| \leq \int_{a_k+\epsilon'}^{a_k+\epsilon} |f'(x)|dx$$

であるから，$\epsilon, \epsilon' \to 0$ とすることにより

$$f(a_k \pm 0) = \lim_{\epsilon > 0, \epsilon \to 0} f(a_k \pm \epsilon)$$

が存在することが分かる．

$$f([a_k]) = f(a_k + 0) - f(a_k - 0)$$

とおく．一方，$f(x)$ は I_k 上では通常の意味で微分可能であるから

$$g(x) = f'(x), \quad x \in I_k, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

とおく．$x = a_k$ における $g(x)$ の値は考えなくてもよい．$f(x) \in L^1_{loc}((a,b))$ であるから $f(x)$ を超関数とみなすことができる．それを $T_f(x)$ と書く．以上の準備の下に次の補題が成り立つ．

補題 3.2.8 $\dfrac{d}{dx}T_f(x) = g(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f([a_k])\delta(x - a_k)$.

証明 $\varphi(x) \in C_0^\infty((a,b))$ に対し

$$-\int_{a_k+\epsilon}^{a_{k+1}-\epsilon} f(x)\varphi'(x)dx = -\Big[f(x)\varphi(x)\Big]_{a_k+\epsilon}^{a_{k+1}-\epsilon} + \int_{a_k+\epsilon}^{a_{k+1}-\epsilon} g(x)\varphi(x)dx$$

であるから $\epsilon \to 0$ として

$$- \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\varphi'(x)dx$$
$$= -f(a_{k+1}-0)\varphi(a_{k+1}) + f(a_k+0)\varphi(a_k) + \int_{a_k}^{a_{k+1}} g(x)\varphi(x)dx$$

である．ただし $k = 0, n+1$ のときは $\varphi(x)$ は a, b の近傍で 0 であるから $f(a_0+0)\varphi(a_0) = f(a_{n+1}-0)\varphi(a_{n+1}) = 0$ と解釈する．この式を加えれば

$$-\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx + \sum_{k=1}^{n} f([a_k])\varphi(a_k)$$

が得られる． □

3.3 超関数と微分方程式

超関数の満たす微分方程式を解くことは今後の重要な目標である．そのために最も基本的な場合から始めよう．

補題 3.3.1 区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ 上の超関数 T が $T' = 0$ を満たせば，ある定数 C に対して $T = C$ である．

証明 $\int_I \varphi_0(x)dx = 1$ となる $\varphi_0 \in C_0^\infty(I)$ をとる．$C_0^\infty(I)$ の元を I の外では 0 とおいて拡張する．$\varphi \in C_0^\infty(I)$ に対して

$$\psi(x) = \varphi(x) - \left(\int_I \varphi(t)dt\right)\varphi_0(x), \quad \psi_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt$$

とおけば $\psi(x), \psi_1(x) \in C_0^\infty(I)$ である．補題の仮定から $\langle T, \phi' \rangle = 0, \forall \phi \in C_0^\infty(I)$ であるから，$C = \langle T, \varphi_0 \rangle$ とおけば

$$0 = \langle T, \psi_1' \rangle = \langle T, \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - C\int_I \varphi(x)dx$$

となり超関数として $T = C$ である． □

$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)(d/dx)^i T = S$ という微分方程式を考えたいのだが，その前に関数と超関数の積を定義する必要がある．

定義 3.3.2 $T \in \mathcal{D}'(I)$ と $a(x) \in C^\infty(I)$ の積 $a(x)T \in \mathcal{D}'(I)$ を

$$\langle a(x)T, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

によって定義する．

補題 3.3.3 $a(x) \in C^\infty(I), T \in \mathcal{D}'(I)$ のとき

$$(a(x)T)' = a'(x)T + a(x)T'.$$

証明　$\varphi \in \mathcal{D}(I)$ に対して

$$\langle \big(a(x)T\big)', \varphi\rangle = -\langle (a(x)T, \varphi'\rangle = -\langle T, a\varphi'\rangle$$

であるが右辺は $-\langle T, (a\varphi)'\rangle + \langle T, a'\varphi\rangle = \langle T', a\varphi\rangle + \langle a'T, \varphi\rangle$ に等しい．　□

定理 3.3.4　$T \in \mathcal{D}'(I)$ が $T' + a(x)T = f$, $a \in C^\infty(I)$, $f \in C(I)$ を満たせば，$T \in C^1(I)$ である．

証明　$A' = a$ となる $A \in C^\infty(I)$ をとれば超関数の意味で $\big(e^{A(x)}T\big)' = e^A f$. よって $F' = e^A f$ となる $F \in C^1(I)$ をとれば $\big(e^{A(x)}T - F\big)' = 0$ となり，補題 3.1 により $e^{A(x)}T - F = C$ となる．　□

この事実はそのまま高階の微分方程式に拡張される．そのために超関数をベクトル値に拡大しよう．定義 3.1.1 において $\mathcal{D}(I)$ の代わりに $\mathcal{D}(I)^n = \mathcal{D}(I) \times \cdots \times \mathcal{D}(I)$ を考え $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_N) \in \mathcal{D}(I)^n$ に対して

$$|\varphi^{(m)}(x)| = \Big(|\varphi_1^{(m)}(x)|^2 + \cdots + |\varphi_n^{(m)}(x)|^2\Big)^{1/2}$$

として (3.2) を満たす $\mathcal{D}(I)^n$ 上の線形汎関数全体を $\mathcal{D}'(I)^n$ と書く．$T \in \mathcal{D}'(I)^n$ に対して $\varphi = (0, \cdots, 0, \varphi_j, 0, \cdots, 0) \in \mathcal{D}(I)^n$ という形の元のみに限定すれば，これは $\mathcal{D}(I)$ 上の線形汎関数となるから超関数 $T_j \in \mathcal{D}'(I)$ とみなせる．よって $T \in \mathcal{D}'(I)^n$ は $T = (T_1, \cdots, T_n)$, $T_j \in \mathcal{D}'(I)$ という形をしている．$T = (T_1, \cdots, T_n) \in \mathcal{D}'(I)^n$, $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \in \mathcal{D}(I)^n$ に対して

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle T_j, \varphi_j\rangle$$

となる．

定理 3.3.5　$a(x)$ を各成分が $C^\infty(I)$ に属する $n \times n$ 行列とし，$T \in \mathcal{D}'(I)^n$ が $T' + a(x)T = f$, $f \in C(I)^n$ を満たすならば $T \in C^1(I)^n$ である．

証明　$x_0 \in I$ を任意にとり，I を $n \times n$ 単位行列として

$$\frac{dU(x)}{dx} - U(x)a(x) = 0, \quad U(x_0) = I$$

を満たす $U(x)$ を求める．常微分方程式の基本定理によりこのような $U(x)$ は I 上で存在し，かつ $\det U(x) \neq 0$ である．

$$(UT)' = U(aT + T') = Uf$$

であるから，$F' = Uf$ となる $F \in C^1(I)^n$ をとれば $(UT - F)' = 0$ であり，ある定数ベクトル $C \in \boldsymbol{C}^n$ に対して $T = U(x)^{-1}(F + C)$ となる．　□

高階単独方程式を 1 階連立方程式に書き換えれば，次の系が従う．

系 3.3.6　$T \in \mathcal{D}'(I)$ が $T^{(n)} + a_1(x)T^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)T = f$, $a_j(x) \in C^\infty(I)$, $f \in C(I)$ を満たせば $T \in C^n(I)$ である．

3.4 超関数の収束

K を開区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ のコンパクト部分区間とし $\mathcal{D}(I)$ 上に

$$p_{n,K}(\varphi) = \sup_{x \in K} \sum_{0 \leq m \leq n} |\varphi^{(m)}(x)| \tag{3.14}$$

というセミノルムを導入する.

定義 3.4.1 I を $\boldsymbol{R}$ の開区間とする. $\varphi_j, \varphi \in \mathcal{D}(I)$ に対して $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(I)$ とは, あるコンパクト区間 K が存在し, $\mathrm{supp}\,\varphi_j \subset K, \forall j$ であって, かつ任意の自然数 n に対して $p_{n,K}(\varphi_j - \varphi) \to 0, \quad j \to \infty$ が成り立つことである.

シュワルツは $\mathcal{D}(I)$ における収束をこのように定義したとき $\mathcal{D}(I)$ 上の連続な線形汎関数を超関数と呼んだ.

定義 3.4.2 $\mathcal{D}(I)$ 上の線形汎関数 T が超関数であるとは, $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(I)$ ならば $\langle T, \varphi_j \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ となることである.

定義 3.1.1 における T の連続性は, 任意のコンパクト区間 $K \subset I$ に対してある k が存在し

$$\sup_{0 \neq \varphi \in C_0^\infty(K)} \frac{|\langle T, \varphi \rangle|}{p_{k,K}(\varphi)} < \infty \tag{3.15}$$

となることを意味する.

定理 3.4.3 定義 3.1.1 と定義 3.4.2 は同値である.

証明 $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(I)$とし, $\mathrm{supp}\,\varphi_j \subset K$となるコンパクト区間$K \subset I$をとる. T が定義 3.1.1 の意味で連続であるならば $|\langle T, \varphi_j - \varphi \rangle| \leq C\, p_{k,K}(\varphi_j - \varphi) \to 0$ となり, 定義 3.4.2 の意味で連続である.

T が定義 3.1.1 の意味で連続でないとすると, あるコンパクト区間 $K \subset I$ が存在し, どのような k をとっても (3.15) の上限が有限にならない, 即ち任意の n, N に対して,

$$|\langle T, \varphi_{n,N} \rangle| > N, \quad p_{n,K}(\varphi_{n,N}) = 1$$

を満たす $\varphi_{n,N} \in C_0^\infty(K)$ が存在する. $\psi_n = \varphi_{n,n}/\langle T, \varphi_{n,n} \rangle$ とおけば $|\langle T, \psi_n \rangle| > 1$ である. 一方 $\psi_n \in C_0^\infty(K)$ であり, 任意の m に対して $p_{m,K}(\psi_n) \to 0$, $n \to \infty$ である. T が定義 3.4.2 の意味で連続とすると, $\langle T, \psi_n \rangle \to 0$ となり矛盾であるから T は定義 3.1.1 の意味で連続である. □

超関数の収束は次のように定義される.

定義 3.4.4 $T_j, T \in \mathcal{D}'(I)$ に対して $T_j \to T$ in $\mathcal{D}'(I)$ とは

$$\langle T_j, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

が成り立つことである.

次の補題の証明は演習問題としよう.

補題 3.4.5 $T_j \to T$ in $\mathcal{D}'(I)$ なら $T_j' \to T'$ in $\mathcal{D}'(I)$ である.

超関数に対しては微分演算や極限操作が自由に行える. このため超関数は微分方程式論において有力な道具となる.

距離が定義されている空間において任意のコーシー列が収束する, 即ち極限が存在するならばその空間は完備 (complete) であると呼ばれる. $\mathcal{D}'(I)$ は距離空間ではないが類似の性質を持っている. $\{T_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(I)$ が超関数の空間でのコーシー列であるとは

$$\langle T_j, \varphi \rangle - \langle T_k, \varphi \rangle \to 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \quad j, k \to \infty$$

が成り立つことである.

定理 3.4.6 $\mathcal{D}'(I)$ は完備である. 即ち $\{T_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(I)$ が $\mathcal{D}'(I)$ でのコーシー列ならば $T \in \mathcal{D}'(I)$ が存在し $\langle T_j, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$ である.

この定理の証明は補遺（定理 A.3.2）に述べる.

3.5 超関数のフーリエ変換

$\mathcal{S}$ を第 1 章第 3 節で与えた急減少関数の空間とする. $\mathcal{S}$ 上の連続な線形汎関数を**緩増加超関数**といい, その全体を $\mathcal{S}'$ と書く. 線形汎関数 T が $\mathcal{S}$ 上連続とは

$$\varphi_j \to \varphi \quad \text{in} \quad \mathcal{S} \implies \langle T, \varphi_j \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$$

が成り立つことである. 以下では $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^1)$ とする. 集合として $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ であるが, $\varphi_j, \varphi \in \mathcal{D}$ が $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}$ なら $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}$ である. 従って $\mathcal{S}$ 上で連続な汎関数は $\mathcal{D}$ 上でも連続であり, $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ である.

定義 3.5.1 $T \in \mathcal{S}'$ に対してそのフーリエ変換 $\widehat{T}$ を

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

によって定義する.

$\widehat{T} = \mathcal{F}T$ と書くこともある. 逆フーリエ変換 $\mathcal{F}^{-1}$ も同様に定義される.

補題 3.5.2 (1) $T_j \to T$ in $\mathcal{S}' \Longrightarrow \widehat{T}_j \to \widehat{T}$ in $\mathcal{S}'$.

(2) $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ は上への 1 対 1 写像で $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ ともに連続である.

(3) 任意の $T \in \mathcal{S}'$ に対して反転公式 $T = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T$ が成り立つ.

(4) $D_x = -id/dx$ とすれば $T \in \mathcal{S}'$ に対し

$$\widehat{x^n T} = (-D_\xi)^n \widehat{T}, \tag{3.16}$$

$$\widehat{D_x^n T} = \xi^n \widehat{T}. \tag{3.17}$$

証明 どれも定義から用意に従うのだが，例えば (4) は次のようになる．第 1 章 (1.17) により

$$\langle \widehat{x^n T}, \varphi \rangle = \langle x^n T, \widehat{\varphi} \rangle = \langle T, x^n \widehat{\varphi} \rangle = \langle T, \widehat{D_\xi^n \varphi} \rangle = \langle \widehat{T}, D_\xi^n \varphi \rangle = \langle (-D_\xi)^n \widehat{T}, \varphi \rangle$$

であるから (3.16) が従う．(3.17) も同様である．

$$\langle \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

より (3) が従う．残りの主張の証明は演習問題とする． □

例 3.5.3 $f \in L^1(\boldsymbol{R})$ のとき，第 1 章の意味での f のフーリエ変換と f の超関数の意味でのフーリエ変換は一致する．

これは次のように計算すれば分かる．混乱をさけるために $f \in L^1(\boldsymbol{R})$ の定める超関数を T_f と書けば

$$\begin{aligned}
\langle T_f, \widehat{\varphi} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\varphi(\xi)d\xi \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx \right) \varphi(\xi)d\xi = \langle T_{\widehat{f}}, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

であるから $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$ である．

例 3.5.4 $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ のとき，第 1 章の意味での f のフーリエ変換と f の超関数の意味でのフーリエ変換は一致する．

実際 $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対して $f_j \to f$ in $L^2(\boldsymbol{R})$ となる $f_j \in L^1(\boldsymbol{R}) \cap L^2(\boldsymbol{R})$ をとる．$\langle T_{\widehat{f_j}}, \varphi \rangle = \langle \widehat{T_{f_j}}, \varphi \rangle = \langle T_{f_j}, \widehat{\varphi} \rangle$ において $j \to \infty$ とすれば $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$ が分かる．

デルタ関数のフーリエ変換は次のようになる．

例 3.5.5 $\widehat{\delta} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

これは次のように計算する．

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi \right\rangle.$$

例 3.5.6 $T \in \mathcal{S}'$ が $x^n T = 0, n \geq 1$ を満たせば，$T = \sum_{m=0}^{n-1} c_m \delta^{(m)}$.

実際，補題 3.5.2 により $D_\xi^n \widehat{T} = 0$ であるから系 3.3.6 によって $\widehat{T} \in C^n(\boldsymbol{R})$ となり，$\widehat{T}$ は高々 $n-1$ 次の多項式である．

$$\xi^m = \sqrt{2\pi}\xi^m \widehat{\delta} = \sqrt{2\pi}\widehat{\delta^{(m)}}$$

より $\mathcal{F}^{-1}\xi^m = \sqrt{2\pi}\delta^{(m)}$ であるから $T = \sum_{m \leq n-1} c_m \delta^{(m)}$ となる．

3.6 斉次超関数

以下では $\boldsymbol{R}$ 上の超関数 T をあたかも普通の関数のように $T(x)$ と書く．定数 $0 \neq t \in \boldsymbol{R}$ に対して超関数 $T(tx)$ を

$$\langle T(tx), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{t}\left\langle T(x), \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}) \tag{3.18}$$

によって定義する．$f(x) \in L^1_{loc}(\boldsymbol{R} \setminus \{0\})$ が α 次斉次とは $f(tx) = t^\alpha f(x)$ がすべての $t > 0$ と $0 \neq x \in \boldsymbol{R}$ に対して成り立つことであった．この式に $\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R} \setminus \{0\})$ をかけて積分することにより次の定義が自然であることが分かるであろう．

定義 3.6.1 $\alpha \in \boldsymbol{R}$ を定数とする．$T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R})$ は

$$\langle T(tx), \varphi(x) \rangle = t^\alpha \langle T(x), \varphi(x) \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}), \quad \forall t > 0$$

を満たすとき α 次斉次の超関数であると呼ばれる．

言い換えると $T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R})$ が α 次斉次とは

$$\frac{1}{t}\left\langle T(x), \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right\rangle = t^\alpha \langle T(x), \varphi(x) \rangle, \quad \forall t > 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$$

が成り立つことである．

例 3.6.2

$$\left\langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R})$$

で定義される超関数をコーシーの主値という．p.v. は principal value の略である．仏語では valeur principale となるので v.p. と書くこともある．これが超関数となることを示そう．$\varphi(tx)$ を t に関して微分して 0 から 1 まで積分すれば

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\psi(x), \quad \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx) dt \tag{3.19}$$

となる．$\operatorname{supp} \varphi \subset (-L, L)$ とすれば

$$\int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\epsilon<|x|<L} \psi(x) dx$$

となり

$$\left| \left\langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle \right| \le C_L \sup_{|x|\le L} |\varphi'(x)|$$

であるから，これは超関数である．-1 次斉次であることを確かめるのは演習問題としよう．

例 3.6.3

$$\left\langle \frac{1}{x \pm i0}, \varphi(x) \right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\epsilon} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R})$$

で定義される超関数も重要である．右辺の極限が存在することを示そう．$\operatorname{supp}\varphi \subset (-L, L)$ とすれば (3.19) を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\epsilon} dx = \varphi(0) \int_{-L}^{L} \frac{dx}{x \pm i\epsilon} + \int_{-L}^{L} \frac{x\psi(x)}{x \pm i\epsilon} dx \tag{3.20}$$

となる．$z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \le \theta < 2\pi$ に対して $\log z = \log r + i\theta$ ととれば

$$\int_{-L}^{L} \frac{dx}{x \pm i\epsilon} = \log(L \pm i\epsilon) - \log(-L \pm i\epsilon) \to \mp i\pi$$

であるから (3.20) の右辺第 1 項は $\mp i\pi\varphi(0)$ に収束する．また右辺第 2 項はルベーグの収束定理によって $\int_{-L}^{L} \psi(x)dx$ に収束するが

$$\int_{\epsilon<|x|<L} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\epsilon<|x|<L} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{\epsilon<|x|<L} \frac{\varphi(0)}{x} dx$$

と変形すれば右辺第 2 項は 0 になるので

$$\left\langle \mathrm{v.p.}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \int_{-L}^{L} \psi(x) dx$$

となる．よって次の式が導かれた．

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}. \tag{3.21}$$

これより特に

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x - i0} - \frac{1}{x + i0} \right) = \delta(x) \tag{3.22}$$

である．

例 3.6.4 上の例に関連して

$$\frac{d}{dx} \log(x \pm i0) = \frac{1}{x \pm i0} \tag{3.23}$$

が成り立つことに注意しよう．左辺の意味は次のようなものである．まず

$$\log(x+i\epsilon) \to \begin{cases} \log x, & x>0, \\ \log|x|+\pi i, & x<0, \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\log(x-i\epsilon) \to \begin{cases} \log x+2\pi i, & x>0, \\ \log|x|+\pi i, & x<0 \end{cases} \tag{3.25}$$

に注意する．(3.24), (3.25) の右辺の L^1_{loc}-関数を $\log(x \pm i0)$ とするのである．(3.23) を示すには次のようにする．まず $\epsilon>0$ のときには

$$\frac{d}{dx}\log(x \pm i\epsilon) = \frac{1}{x \pm i\epsilon}$$

が普通の微分可能関数の意味で成り立つ．$0<\epsilon<1$ によらない定数 $C>0$ が存在し

$$|x|^{1/2}|\log(x \pm i\epsilon)| \le C, \quad 0<|x|<1$$

となることから超関数の意味で $\log(x \pm i\epsilon) \to \log(x \pm i0)$ が成り立つことが分かる．そこで補題 3.4.5 を使えばよい．

例 3.6.5 $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ のとき

$$\theta_+(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{x^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, & x>0, \\ 0, & x<0 \end{cases} \tag{3.26}$$

とおく．$\Gamma(z)$ はガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx \tag{3.27}$$

である．$\theta_+(x,\lambda) \in L^1_{loc}(\boldsymbol{R})$ であるから $\theta_+(x,\lambda)$ は $\boldsymbol{R}$ 上の超関数を定義する．それも同じ記号 $\theta_+(x,\lambda)$ で表す．$\mathrm{Re}\,\lambda > -1-m$ $(m=1,2,\cdots)$ のとき

$$\theta_+(x,\lambda) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m \theta_+(x,\lambda+m) \tag{3.28}$$

によって超関数 $\theta_+(x,\lambda)$ を定義しよう．この定義がうまくいっていることを示すために $\mathrm{Re}\,\lambda > -1-m$, $\mathrm{Re}\,\lambda > -1-n$ (m,n は自然数) のとき

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m \theta_+(x,\lambda+m) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \theta_+(x,\lambda+n) \tag{3.29}$$

となることを示す．$m>n$ としよう．定義により $\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ に対して

$$\left\langle \left(\frac{d}{dx}\right)^m \theta_+(x,\lambda+m), \varphi(x) \right\rangle = \frac{(-1)^m}{\Gamma(\lambda+m+1)} \int_0^\infty x^{\lambda+m}\left(\frac{d}{dx}\right)^m \varphi(x)dx$$

である．右辺は部分積分により

$$\frac{(-1)^m(-1)^{m-n}(\lambda+m)\cdots(\lambda+n+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)} \int_0^\infty x^{\lambda+n}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \varphi(x)dx$$

となるが等式

$$\Gamma(z+1) = \Gamma(z)$$

を繰り返し用いればこれは

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(\lambda+n+1)} \int_0^\infty x^{\lambda+n}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \varphi(x)dx$$

となるから (3.29) が示された．超関数 $\theta_-(x,\lambda)$ は

$$\theta_-(x,\lambda) = \theta_+(-x,\lambda) \tag{3.30}$$

によって定義される．

補題 3.6.6 $\theta_\pm(x,\lambda)$ は次の意味で $\boldsymbol{C}$ 上の正則関数（整関数）である: 任意の $\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ に対して $\langle\theta_\pm(x,\lambda), \varphi(x)\rangle$ は $\lambda \in \boldsymbol{C}$ に関して正則．また任意の $n = 0,1,2,\cdots$ に対し

$$\theta_\pm(x,\lambda) = \left(\pm\frac{d}{dx}\right)^n \theta_\pm(x,\lambda+n)$$

が成り立つ．

証明 λ に関する正則性を示す．$\varphi(x) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R})$ と $\epsilon > 0$ に対して $I_\epsilon(\lambda) = \int_\epsilon^\infty x^\lambda \varphi(x)dx$ は λ の正則関数である．$\epsilon \to 0$ とすると $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ において $I_\epsilon(\lambda)$ は $I(\lambda) = \int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)dx$ に広義一様収束するから $I(\lambda)$ も正則である．よって $\langle\theta_+(x,\lambda), \varphi(x)\rangle$ は $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ で正則である．(3.28) によって $\langle\theta_+(x,\lambda), \varphi(x)\rangle = (-1)^m\langle\theta_+(x,\lambda), \varphi^{(m)}(x)\rangle$ は $\mathrm{Re}\,\lambda > -1-m$ において正則である．□

$\theta_\pm(x,\lambda)$ のフーリエ変換を計算しよう．

補題 3.6.7 $\mathcal{F}(\theta_\pm(x,\lambda)) = (2\pi)^{-1/2}e^{\mp(\lambda+1)\pi i/2}(\xi \mp i0)^{-(\lambda+1)}$.

証明 $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ の場合を考える．$\epsilon > 0$ とし $T_\epsilon = e^{-\epsilon x}\theta_+(x,\lambda)$ とおけば，$\varphi(x) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$ に対して

$$\langle\hat{T}_\epsilon, \varphi\rangle = \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\infty x^\lambda e^{-\epsilon x}\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-ix\xi}\varphi(\xi)d\xi\right)dx$$

である．そこで積分

$$\int_0^\infty x^\lambda e^{-x(\epsilon+i\xi)}dx$$

を考える．$s = \epsilon + i\xi$ とおき積分路 $C = \{ts\,;\, 0 \le t < \infty\}$ を考えれば，

$$\int_C z^\lambda e^{-z}dz = s^{\lambda+1}\int_0^\infty t^\lambda e^{-ts}dt$$

である．ただしここで $a, b \in \boldsymbol{C}$ に対して $a^b = e^{b\log a}$, $\log a = \log|a| + i\arg a$, $-\pi < \arg a \le \pi$ とした．コーシーの積分定理により左辺の積分路を $[0,\infty)$ に

変えれば

$$\int_0^\infty t^\lambda e^{-ts}dt = \Gamma(\lambda+1)s^{-(\lambda+1)}$$

となる．よって

$$\langle \hat{T}_\epsilon, \varphi\rangle = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^\infty (\epsilon+i\xi)^{-(\lambda+1)}\varphi(\xi)d\xi$$

である．$\epsilon \to 0$ のとき

$$\log(\epsilon+i\xi) \to \begin{cases} \log|\xi| + \pi i/2 & (\xi>0) \\ \log|\xi| - \pi i/2 & (\xi<0) \end{cases} = \log(\xi - i0) + \pi i/2$$

であるから

$$(\epsilon+i\xi)^{-(\lambda+1)} \to e^{-(\lambda+1)\pi i/2}(\xi - i0)^{-(\lambda+1)}$$

となる．これより

$$\mathcal{F}\left(\theta_+(x,\lambda)\right) = (2\pi)^{-1/2}e^{-(\lambda+1)\pi i/2}(\xi-i0)^{-(\lambda+1)}$$

が $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ のときに示された．両辺ともに $\lambda \in \boldsymbol{C}$ に関して正則であるから，これはすべての $\lambda \in \boldsymbol{C}$ に対して成り立つ．$\theta_-(x,\lambda)$ に対しても同様に示される． □

例 3.6.8 ヘビサイド関数 $H(x)$ のフーリエ変換は

$$\hat{H}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\xi) - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{\xi}.$$

これは補題 3.6.7 と (3.21) によって示される．

第 4 章
多変数の超関数

n 変数の超関数とそのフーリエ変換を定義し，重要な例を述べる．

4.1　多重指数とテイラー展開

α_j, $j = 1, 2, \cdots, n$ を 0 以上の整数とし $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ とおく．以下ではこのような α を多重指数 (multi-index) と呼ぶ．$\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ は成分同士の和，差によって定義する．α の長さは

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

とする．α, β の大小関係を

$$\alpha \geq \beta \Longleftrightarrow \alpha_j \geq \beta_j, \quad 1 \leq \forall j \leq n$$

によって定義する．

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

とおき，2 項係数を

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!\beta!}$$

によって定義する．$x \in \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$$

とおく．ただし $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$ である．多重指数を使うことによって 1 変数の微分に関する公式がそのままの形で多変数でも成り立つ．まずライプニッツ (Leibnitz) の公式は

$$\partial_x^\alpha\bigl(f(x)g(x)\bigr)=\sum_{\beta\le\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\partial_x^{\alpha-\beta}f(x)\cdot\partial_x^\beta g(x) \tag{4.1}$$

となる．記号になれるためにこの公式を証明しよう．変数の個数に関する帰納法による．$n=1$ のときは成り立っている．$n-1$ 変数のときに成立するとし $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$, $\alpha'=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$ と書けば

$$\begin{aligned}&\partial_{x'}^{\alpha'}\bigl(f(x',x_n)g(x',x_n)\bigr)\\ =&\sum_{\beta'\le\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}\partial_{x'}^{\alpha'-\beta'}f(x',x_n)\cdot\partial_{x'}^{\beta'}g(x',x_n)\end{aligned}$$

である．この式の両辺を x_n で微分し 1 変数の場合のライプニッツの公式と

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

を用いれば (4.1) が得られる．

次の公式は上と同様に帰納法で示されるので演習問題とする．

演習問題 4.1.1 次の公式を示せ．

(1) $\partial_x^\beta x^\alpha=\dfrac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}x^{\alpha-\beta}\quad(\beta\le\alpha)$.

(2) 多項定理

$$(x_1+\cdots+x_n)^N=\sum_{|\alpha|=N}\frac{N!}{\alpha!}x^\alpha.$$

(3) $y=(y_1,\cdots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n$ に対して

$$L=y_1\partial_{x_1}+\cdots+y_n\partial_{x_n}$$

とおけば,

$$L^N=\sum_{|\alpha|=N}\frac{N!}{\alpha!}y^\alpha\partial_x^\alpha.$$

n 変数関数に対するテイラー (Taylor) 展開の公式は次のようになる．

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\le N-1}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\left(\partial_x^\alpha f\right)(0)+R_N(x), \tag{4.2}$$

$$R_N(x)=N\sum_{|\alpha|=N}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^{N-1}\left(\partial_x^\alpha f\right)(tx)dt. \tag{4.3}$$

この公式を示すために $y\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $g(t)=f(ty)$ とおく．1 変数関数に対するテイラー展開の公式より

$$g(1)=\sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{m!}g^{(m)}(0)+\frac{1}{(N-1)!}\int_0^1(1-t)^{N-1}g^{(N)}(t)dt$$

である．演習問題 4.1.1 (3) により

$$g^{(m)}(t) = (L^m f)(t) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} y^\alpha (\partial_x^\alpha f)(ty)$$

となるから，(4.2) が得られた．

4.2 曲面上の積分

4.2.1 局所的表示

$\boldsymbol{R}^n$ 内の $n-1$ 次元曲面上での積分について復習しよう．曲面の表示の仕方として次の 3 つの方法がある．

(1) 関数のグラフ：$S = \{x\,;\, x_n = f(x_1, \cdots, x_{n-1}),\ (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U\}$. ここで U は $\boldsymbol{R}^{n-1}$ のある開集合である（$S = \{x\,;\, x_1 = g(x_2, \cdots, x_n),\ (x_2, \cdots, x_n) \in U\}$ などと表すこともある）．

(2) 関数の零点：$S = \{x \in V\,;\, F(x) = 0\}$, V は $\boldsymbol{R}^n$ のある開集合．ただし S 上で $\nabla_x F(x) \neq 0$ と仮定する．ここで

$$\nabla_x F(x) = (\partial_{x_1} F(x), \cdots, \partial_{x_n} F(x))$$

である．

(3) パラメータ表示：$\boldsymbol{R}^{n-1}$ の開集合 U 上で定義された $\boldsymbol{R}^n$ に値をとる関数 $x(u) = (x_1(u), \cdots, x_n(u))$ をとり，$S = \{x(u)\,; u \in U\}$ とする．ただし U 上で

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial x}{\partial u_{n-1}}\right) = n-1$$

と仮定する．ここで $x(u)$ は列ベクトルを表す．u は S を表すパラメータ，あるいは**局所座標**と呼ばれる．

この 3 つの方法は同等である．$F(x) = x_n - f(x_1, \cdots, x_n)$ とおけば (1) は (2) に含まれるので，(2) が (3) に含まれることを示そう．p を S 上の任意の点とするとき $\nabla_x F(p) \neq 0$ であるから，例えば $\partial_{x_n} F(p) \neq 0$ としてよい．このとき陰関数の定理によって，p の近くでは $F(x) = 0$ は $x_n = f(x_1, \cdots, x_{n-1})$ という形に表される．ここで $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ は $p = (p_1, \cdots, p_{n-1}, p_n)$ とするとき $(p_1, \cdots, p_{n-1})$ を含むある開集合 U の上を動く．そこで $u = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ ととればよい．(3) から (1) を出そう．(3) の条件より x の $n-1$ 個の成分，例えば $(x_1, \cdots, x_{n-1}) =: y$ をとって

$$\det\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial y}{\partial u_{n-1}}\right) \neq 0$$

となる．これより (必要なら U を小さくとり直して) $u \in U$ は $x_1, \cdots, x_{n-1}$ の関数となる．よって $x_n(u)$ も $x_1, \cdots, x_{n-1}$ の関数となる．それを

$f(x_1, \cdots, x_{n-1})$ とおけば $x_n = f(x_1, \cdots, x_{n-1})$ と書ける．

曲面 S が与えられたとき，多くの場合 S 全体を上の方法のうちの 1 つだけで表すことはできず，S をいくつかの部分に分けて個別に上の方法を適用することになる．

そこで (3) の方法を用いよう．話を分かり易くするために最初は S 全体が 1 つのパラメータの取り方によって表示されているものとしよう．

$\boldsymbol{R}^n$ の内積を $\langle\ ,\ \rangle$ で表し

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle$$

とおく．

$$dS = \sqrt{\det(g_{ij})}\, du_1 \cdots du_{n-1} \tag{4.4}$$

を S 上の**面積要素**という．詳しくいえば S 上の関数 f に対して

$$\int_S f\, dS = \int_U f \sqrt{\det(g_{ij})}\, du_1 \cdots du_{n-1} \tag{4.5}$$

と定義する．

dS の幾何学的意味は次のようなものである．Δu_i を非常に小さくとり微小変位

$$x(u_1, \cdots, u_i + \Delta u_i, \cdots, u_{n-1}) - x(u) = \frac{\partial x}{\partial u_i}(u)\Delta u_i + O((\Delta u_i)^2)$$

を考える．$\dfrac{\partial x}{\partial u_i}(u)\Delta u_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ が S 上に作る微小 $2(n-1)$ 面体の $n-1$ 次元体積を ΔS とする．$x(u)$ における S の単位法ベクトルを ν とし

$$W = \left(\frac{\partial x}{\partial u_1}(u)\Delta u_1, \cdots, \frac{\partial x}{\partial u_{n-1}}(u)\Delta u_{n-1}, \nu \right)$$

とおく．ここで ν は列ベクトルである．W の n 個の列ベクトルで作られる平行 $2n$ 面体の n 次元体積は ΔS の $n-1$ 次元体積に等しいから

$$|\Delta S|^2 = |\det W|^2 = \det\left({}^t WW\right) = \det(g_{ij})(\Delta u_1 \cdots \Delta u_{n-1})^2 \tag{4.6}$$

となり，$\Delta S = \sqrt{\det(g_{ij})}\Delta u_1 \cdots \Delta u_{n-1}$ となる．

(4.6) を計算するには次のようにする．W において $\Delta u_i = 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$ としたものを $\widetilde{W}$ とすると

$$\det\left({}^t WW\right) = (\Delta u_1 \cdots \Delta u_{n-1})^2 \det\left({}^t \widetilde{W}\widetilde{W}\right)$$

である．$\left({}^t \widetilde{W}\widetilde{W}\right)$ の ij 成分は $1 \leq i, j \leq n-1$ のとき g_{ij}，$1 \leq i \leq n-1$, $j = n$ または $1 \leq j \leq n-1$, $i = n$ のとき 0 $\left(\nu \perp \dfrac{\partial x}{\partial u_i}\right.$ を使う$\left.\right)$，$i = j = n$ のとき 1 であることが分かるから $\det\left({}^t \widetilde{W}\widetilde{W}\right) = \det(g_{ij})$ である．(4.6) から (4.4) の右辺がパラメータ u の取り方によらないことも納得できるであろう．

次の例を計算するのはよい演習問題である．

例 4.2.1 $n=3$ のときは $\times$ をベクトル積として

$$dS = \left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \times \frac{\partial x}{\partial u_2} \right| du_1 du_2$$

これはベクトル積の性質を用いて上のような幾何学的考察に基づいて証明することができるが，次のような計算によっても示される．まずラグランジュ(Lagrange) の恒等式

$$\begin{aligned}&(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\ =\ &(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2\end{aligned}$$

に注意する．慣用の記号

$$E = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle, \quad F = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle, \quad G = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle,$$
$$A = \frac{\partial(x_2,x_3)}{\partial(u_1,u_2)}, \quad B = \frac{\partial(x_3,x_1)}{\partial(u_1,u_2)}, \quad C = \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u_1,u_2)}$$

を用いれば，ラグランジュの恒等式により

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

が成り立つ．

例 4.2.2（**極座標**） (1) $n=3$ のとき S^2 の面積要素は $x_3=\cos\theta$, $x_1=\sin\theta\cos\varphi$, $x_2=\sin\theta\cos\varphi$ を用いて $dS=\sin\theta d\theta d\varphi$.

(2) $n=2$ のとき S^1 の線要素は $x_1=\cos\theta$, $x_2=\sin\theta$ を用いて $d\theta$.

n 次元の場合に戻って，特に S が $x_n=f(x_1,\cdots,x_{n-1})$ という形に書けるときは (このときは $x_1,\cdots,x_{n-1}$ を局所座標にとったことになる)

$$dS = \sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2}\, dx_1\cdots dx_{n-1} \tag{4.7}$$

となる．実際このときには $g_{ij}=\delta_{ij}+\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ となるから次のことを示せばよい．

補題 4.2.3 $a=(a_1,\cdots,a_m)$ に対して

$$\det(\delta_{ij}+a_ia_j) = 1+|a|^2$$

証明 行列 (a_ia_j) の固有値が $|a|^2, 0, \cdots, 0$ であることを示せばよい．$a\neq 0$ とし直交行列 T を ${}^tTa=|a|(1,0,\cdots,0)$ となるようにとる．$x=Tx', y=Ty'$ とすると

$$\langle (a_i a_j)x, y\rangle = \langle a, x\rangle\langle a, y\rangle = |a|^2 x_1' y_1'$$

となる．これは $T^{-1}(a_i a_j)T$ が $|a|^2, 0, \cdots, 0$ を対角成分とする対角行列であることを意味している． □

S が $F(x_1, \cdots, x_n) = 0$, $\partial_{x_n} F \neq 0$ の形に表されているときには

$$dS = \left|\frac{\partial F}{\partial x_n}\right|^{-1} \left|\nabla_x F\right| dx_1 \cdots dx_{n-1} \tag{4.8}$$

となる．実際，陰関数の定理によって，$x_n = x_n(x_1, \cdots, x_{n-1})$ と書ける．混乱を避けるために $x_i = u_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ とおけば

$$\frac{\partial x}{\partial u_i} = {}^t\!\left(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0, \frac{\partial x_n}{\partial u_i}\right)$$

であるから

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle = \delta_{ij} + \frac{\partial x_n}{\partial u_i}\frac{\partial x_n}{\partial u_j}$$

となる．よって補題 4.2.3 によって

$$\det\left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle\right) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial x_n}{\partial u_i}\right)^2$$

である．$F(u_1, \cdots, u_{n-1}, x_n) = 0$ を u_i で微分して

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_i} = 0$$

となることを用いれば，(4.8) が示される．

S が $F(x) = 0$ で与えられているとき，$\nu = \nabla F(x)/|\nabla F(x)|$ は S の単位法ベクトルである．実際 $c(t)$ を任意の S 内の曲線とするとき $F(c(t)) = 0$ を t で微分すれば

$$\nabla F(c(t)) \cdot \frac{d}{dt}c(t) = 0$$

となるが，$\dfrac{d}{dt}c(t)$ は S に接するベクトルであるから，$\nabla F(c(t))$ は S の法ベクトルである．

以上の準備の下に部分積分の公式を導こう．

定理 4.2.4 Ω を $\boldsymbol{R}^n$ の有界領域とし，境界 $\partial\Omega$ の外向き単位法ベクトルを $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ とするとき

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, dx = \int_{\partial\Omega} \nu_j uv\, dS - \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx.$$

ここで dS は $\partial\Omega$ の面積要素である．

証明 $j=n$ とする．Ω が有限個の縦線型の領域 $\{\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1})<x_n<\psi(x_1,\cdots,x_{n-1}\}$ の和になっている場合に証明する．Ω を分割することにより $\Omega=\{x\,;f_-(x')<x_n<f_+(x'),x'\in U\}$, $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$ としてよい．

$$\int_{f_-(x')}^{f_+(x')}\frac{\partial u}{\partial x_n}v dx_n=\Big[uv\Big]_{x_n=f_-(x')}^{x_n=f_+(x')}-\int_{f_-(x')}^{f_+(x')}u\frac{\partial v}{\partial x_n}dx_n$$

を x' で積分することにより

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_n}vdx=&\int_U u(x',f_+(x'))v(x',f_+(x'))dx'\\&-\int_U u(x',f_-(x'))v(x',f_-(x'))dx'-\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_n}dx\end{aligned}$$

$g=x_n-f_+(x')$ とおけば，$\{x_n=f_+(x')\}$ での外向き単位法ベクトルは $\nabla g/|\nabla g|$ であるから

$$\nu_n=\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f_+}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}$$

である．よって (4.7) により $dx'=\nu_n dS$ となる． □

ベクトル解析における積分公式はすべて定理 4.2.4 から導かれる．

定理 4.2.5 Ω を $\boldsymbol{R}^n$ の有界領域とし，境界 $\partial\Omega$ の外向き単位法ベクトルを ν, また $\dfrac{\partial}{\partial\nu}=\nu\cdot\nabla$ とするとき

$$\int_\Omega(\Delta u)\,v\,dx=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}v\,dS-\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\,dx,\tag{4.9}$$

$$\int_\Omega\Big((\Delta u)\,v-u\,(\Delta v)\Big)\,dx=\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}v-u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)\,dS.\tag{4.10}$$

証明は演習問題としよう．

4.2.2 大域的表示

一般には曲面は上で述べたようなものがいくつか集まってできている．そこで次のようなものを考える．話を分かり易くするために有界な曲面に限定する．A を有限集合とし，各 $a\in A$ ごとに $\boldsymbol{R}^{n-1}$ の有界な連結開集合 U^a と U^a から $\boldsymbol{R}^n$ への C^∞-写像 $\varphi^a:U^a\to\boldsymbol{R}^n$ が与えられ，次の条件を満たすとする．

(S-1) φ^a は 1 対 1 で，φ^a とそのすべての微分が U^a 上で有界．

(S-2) U^a 上の任意の点 u^a で

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\varphi^a}{\partial u_1^a},\cdots,\frac{\partial\varphi^a}{\partial u_{n-1}^a}\right)=n-1.$$

(S-3) $S^a=\varphi^a(U^a)$ とおくと $S:=\bigcup_{a\in A}S^a$ は $\boldsymbol{R}^n$ の連結集合．

U^a としては例えば $\{u \in \boldsymbol{R}^{n-1} ; |u| < r\}$ のようなものを想像すればよい．

さて 各 a ごとに S^a 上の面積要素 dS^a が前小節のように定義されているが，S^a と S^b の共通部分ではこれらが同じものであることを示そう．

補題 4.2.6 $S^a \cap S^b \neq \emptyset$ のとき，$S^a \cap S^b$ 上では $dS^a = dS^b$.

証明 φ^a, φ^b が 1 対 1 であることに注意して

$$U_b^a = (\varphi^a)^{-1}(S^a \cap S^b), \quad U_a^b = (\varphi^b)^{-1}(S^a \cap S^b)$$

とおく．$u^a = u, u^b = \overline{u}$ とおく．$\overline{u}$ は複素共役ではないので一見奇妙な記号だが，変数変換を考えるときによく用いられる．$\varphi^a(u^a) = \varphi^b(u^b)$ のとき u は $\overline{u}$ の関数，あるいは $\overline{u}$ が u の関数となることに注意しよう．$dS^a = dS^b$ とは，U_b^a 上の任意の可積分関数 $f(u)$ に対して

$$\int_{U_b^a} f(u)\, dS^a = \int_{U_a^b} f(u(\overline{u}))\, dS^b \tag{4.11}$$

が成り立つことである．$u, \overline{u}$ の成分を $u = (u^1, \cdots, u^{n-1}), \overline{u} = (\overline{u}^1, \cdots, \overline{u}^{n-1})$ と表す．$x = \varphi^a(u) = \varphi^b(\overline{u})$ より，x を u あるいは $\overline{u}$ の関数とみなせば

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle = \sum_{k,l} \left\langle \frac{\partial x}{\partial \overline{u}^k}, \frac{\partial x}{\partial \overline{u}^l} \right\rangle \frac{\partial \overline{u}^k}{\partial u^i} \frac{\partial \overline{u}^l}{\partial u^j}$$

である．$\dfrac{\partial \overline{u}^l}{\partial u^j}$ を jl 成分に持つ行列を D とすれば上の関係は

$$\left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle \right) = {}^tD \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial \overline{u}^k}, \frac{\partial x}{\partial \overline{u}^l} \right\rangle \right) D$$

となる．

$$g = \det \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle \right), \quad \overline{g} = \det \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial \overline{u}^k}, \frac{\partial x}{\partial \overline{u}^l} \right\rangle \right)$$

とおけば

$$g = \overline{g} J^2, \quad J = \left| \frac{\partial(\overline{u}^1, \cdots, \overline{u}^{n-1})}{\partial(u^1, \cdots, u^{n-1})} \right|$$

である．積分の変数変換の公式によって (4.11) が得られる．□

以下では S が $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト集合になっている場合のみを考えよう．このような S を**閉曲面**と呼ぶことがある．$\epsilon > 0$ に対し

$$U^{a,\epsilon} = \{u \in U^a ; \operatorname{dist}(u, \partial U^a) > \epsilon\}, \quad S^{a,\epsilon} = \varphi^a(U^{a,\epsilon})$$

とおく．ただし $\operatorname{dist}(x, K)$ は x と K との間の距離である．$0 < \epsilon' < \epsilon$ のとき $U^{a,\epsilon} \subset U^{a,\epsilon'} \subset U^a$, $S^{a,\epsilon} \subset S^{a,\epsilon'} \subset S^a$ である．

補題 4.2.7 $\epsilon > 0$ を小さくとれば $\bigcup_{a \in A} S^{a,\epsilon} = S$.

証明　成り立たないとすると，$\epsilon_1 > \epsilon_2 > \cdots \to 0$ と $x^{(j)} \in S$ が存在し，$x^{(j)} \notin S^{a,\epsilon_j}, \forall a, j$. S はコンパクトだから $x^{(j)}$ はある $x \in S$ に収束するとしてよい．$S = \bigcup_{a\in A} U^a$ だから，ある $a \in A$ に対して $x \in S^a$ となり，従って十分小さい $\epsilon > 0$ に対して $x \in S^{a,\epsilon}$ である．しかし $\epsilon_j < \epsilon$ に対して $x^{(j)} \notin S^{a,\epsilon_j}$ であるから，$j \to \infty$ として $x \notin S^{a,\epsilon}$ となり矛盾．□

補題 4.2.8　補題 2.7 の ϵ に対して，S 上の C^∞-関数 χ^a で

$$\sum_{a\in A} \chi^a = 1 \quad \text{on} \quad S, \quad \operatorname{supp} \chi^a \subset S^a, \quad \chi^a = 1 \quad \text{on} \quad S^{a,\epsilon}$$

を満たすものが存在する．

証明に先立って用語を補っておこう．補題 4.2.8 の関数 χ^a はその台が S^a に含まれている．従って χ^a は局所座標 $u \in U^a$ で書き表される関数である．χ^a が S 上の C^∞-関数であるとは，この局所座標 u で書き表したときに C^∞-関数になっている，という意味である．

証明　$\psi^a(u)$ を $U^{a,\epsilon/2}$ の特性関数とし，フリードリックスの軟化子（補遺 A.2）を用いて $f^a = \rho_\delta * \psi^a$ とおく．ただし $0 < \delta < \epsilon/2$ とする．補題 A.2.2 により $f^a \in C^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1})$ であり，$\operatorname{supp} f^a \subset U^a$ かつ $U^{a,\epsilon}$ 上で $f^a = 1$ である．$\chi^a = \left(\sum_{b\in A} f^b\right)^{-1} f^a$ とおけば，これが求めるものである．□

補題 4.2.8 の関数 $\{\chi^a\}_{a\in A}$ を S の開被覆 $\{S^a\}_{a\in A}$ に付随した **1 の分解** (partition of unity) という．S 上の関数 f に対して $\chi^a f$ はその台が S^a 内にあるから，$u \in U^a$ の関数とみなすことができる．すべての $a \in A$ に対して $\chi^a f$ が $u \in U^a$ の連続関数であるとき，f を S 上の連続関数，$\chi^a f$ が $u \in U^a$ の C^∞-関数であるとき，f を S 上の C^∞-関数という．

$$dS = \sum_{a\in A} \chi^a dS^a \tag{4.12}$$

を S の面積要素という．f 上の連続関数 f の積分は

$$\int_S f\, dS = \sum_a \int_{S^a} f \chi^a\, dS^a \tag{4.13}$$

で定義される．右辺の積分は (4.5) の意味である．

上のように定義すれば定理 4.2.4，定理 4.2.5 は同じように成立する．実は証明を厳密に行おうとすると注意を要するところが多数あり，あまり易しいものではない．詳しいことは例えば参考文献 [11] にある．

最後に次節で用いる次の公式を示そう．Ω を $\boldsymbol{R}^n$ の有界領域とし $F(x)$ は Ω 上で定義された C^∞-関数で，$-1 < F(x) < 1$，かつ $\nabla_x F(x) \neq 0$ が Ω 上で成り立つものとする．例としては $\Omega = \{x \in \boldsymbol{R}^n\,;\, |x| < \sqrt{2}\}$, $F(x) = |x|^2 - 1$ を考えればよい．$-1 < t < 1$ となる t に対して $t = F(x)$ によって定義さ

れる曲面 $S(t)$ を考える．$S(t)$ は Ω 内の閉曲面であると仮定する．$S(t)$ 上で $\partial_{x_n}F \neq 0$ となる部分においては $t = F(x)$ から $x_n = x_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, t)$ と表すことができる．このとき $u_i = x_i\ (1 \le i \le n-1)$ を $S(t)$ の局所座標にとれば

$$dS(t) = \left|\frac{\partial F}{\partial x_n}\right|^{-1}\Big|\nabla_x F\Big| du_1 \cdots du_{n-1} \tag{4.14}$$

である．さらに

$$\frac{\partial(u_1, \cdots, u_{n-1}, t)}{\partial(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)} = \frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0 \tag{4.15}$$

であるから逆関数の定理により x は $u_1, \cdots, u_{n-1}, t$ によって表される．写像 $(-1,1) \times S(t) \ni (t,p) \to x(t,p) \in \Omega$ が 1 対 1 になると仮定し

$$U = \bigcup_{-1<t<1} S(t)$$

とおく．U は Ω の開部分集合である．

補題 4.2.9 上の仮定の下で $\varphi(x) \in C_0^\infty(U)$ に対し

$$\int_U \varphi(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(\int_{S(t)} \varphi(x(t,u))\frac{dS(t)}{|(\nabla_x F)(x(t,u))|}\right)dt.$$

証明 (4.15) によって

$$du_1 \cdots du_{n-1}dt = \left|\frac{\partial F}{\partial x_n}\right| dx_1 \cdots dx_n$$

であるが，(4.14) を用いれば

$$\frac{1}{|\nabla_x F|}\,dt\,dS(t) = dx_1 \cdots dx_n$$

となるから補題が示された． □

4.3 多変数の超関数の定義

以上の準備の下で多変数の超関数を定義する．それは見掛け上，第 3 章第 1 節のものと同じである．1 つ記号を準備する．$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 Ω に対して $K \subset\subset \Omega$ とは K が Ω の中の相対コンパクト集合，即ち K の閉包 $\overline{K}$ が有界でかつ $\overline{K} \subset \Omega$ となることである．$K \subset\subset \Omega$ と 整数 m に対して

$$p_{m,K}(\varphi) = \sup_{x \in K} \sum_{|\alpha| \le m} \left|\partial_x^\alpha \varphi(x)\right| \tag{4.16}$$

というセミノルムを導入する．

$$C_0^\infty(K) = \{\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n);\ \mathrm{supp}\,\varphi \subset K\}$$

とおく．

定義 4.3.1 Ω を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とする．T が Ω 上の**超関数**であるとは，T が $C_0^\infty(\Omega)$ 上の線形汎関数であって，任意の $K \subset\subset \Omega$ に対してある整数 m と定数 C_K が存在し，任意の $\varphi \in C_0^\infty(K)$ に対して

$$|\langle T, \varphi\rangle| \le C_K p_{m,K}(\varphi) \tag{4.17}$$

が成り立つことである．Ω 上の超関数全体を $\mathcal{D}'(\Omega)$ で表す．

Ω に台を持つ C^∞-関数全体を $\mathcal{D}(\Omega)$ と表す．$\varphi_j, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ とは，ある $K \subset\subset \Omega$ が存在し，任意の整数 m に対して $p_{m,K}(\varphi_j - \varphi) \to 0$ が成り立つこととする．次の定理は定理 3.4.3 と同様にして示される．

定理 4.3.2 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上の線形汎関数 T が超関数であるための必要十分条件は $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ なら $\langle T, \varphi_j\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$ となることである．

超関数の収束や微分の定義も 1 変数の場合と同様である．

定義 4.3.3 $T_j \to T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ とは $\langle T_j, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ となることである．

定義 4.3.4 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ の微分 $\partial_x^\alpha T$ とは

$$\langle \partial_x^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial_x^\alpha \varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

によって定義される超関数である．

定理 4.3.5 すべての超関数 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ は無限回微分可能である．また $T_j \to T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ なら，任意の α に対して $\partial_x^\alpha T_j \to \partial_x^\alpha T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ である．

4.4 超関数の例

$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 Ω に対して $f(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ とは任意の $K \subset\subset \Omega$ に対して $f(x) \in L^1(K)$ となることである．

例 4.4.1 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ に対して $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ を

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$$

によって定義する．

例 4.4.2 $a \in \Omega$ に対して超関数 $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$ を

$$\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a), \quad \forall\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$$

によって定義する．$a=0$ のときは単に δ と書く．

1 変数の場合と同様に δ_a を $\delta(x-a)$ と書くのが便利である．

超関数の変数変換も 1 変数の場合と同様に定義される．$\boldsymbol{R}^n$ 内の 2 つの開集合 Ω と Ω_0 の間に変数変換（微分同相写像）$\Omega \ni x \to y \in \Omega_0$ が与えられているとしよう．$f(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ のとき $\varphi(y) \in \mathcal{D}(\Omega_0)$ に対して

$$\int_{\Omega_0} f(x(y))\varphi(y)dy = \int_{\Omega} f(x)\varphi(y(x))J(x)dx$$

($J(x)$ は変数変換 $y \to x$ のヤコビアン) であることに注意する．$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ を通常の関数のように $T(x)$ と書こう．このとき

例 4.4.3　変数変換した超関数 $T(x(y))$ を

$$\langle T(x(y)), \varphi(y)\rangle = \langle T(x), \varphi(y(x))J(x)\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0)$$
$$J(x) = \left|\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|$$

によって定義する．

$F(x)$ は Ω 上で定義された実数値 C^∞-関数で，Ω 上 $\nabla_x F(x) \neq 0$ かつ $-1 < t < 1$ に対して $S(t) = \{t = F(x)\}$ は Ω 内の閉曲面をなしているとする．$\delta(t)$ を 1 変数のデルタ関数とするとき $\delta(F(x))$ はどのような超関数になるであろうか？ 前節の最後で論じたように u を $S(t)$ の局所座標とすれば $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \delta(F(x))\varphi(x)dx &= \int \delta(t)\varphi(x(t,u))\frac{1}{|(\nabla_x F)(x(t,u))|}dtdS(t) \\
&= \int_{-1}^{1} \delta(t)\left(\int_{S(t)} \varphi(x(t,u))\frac{dS(t)}{|(\nabla_x F)(x(t,u))}\right)dt \\
&= \int_{S(0)} \varphi(x(0,u))\frac{dS(0)}{|(\nabla_x F)(x(0,u))|}
\end{aligned}$$

と計算すべきものである．そこで

例 4.4.4　実数値関数 $F(x) \in C^\infty(\Omega)$ が閉曲面 $S = \{F(x) = 0\}$ (ただし $\nabla_x F(x) \neq 0$) を定義するとき

$$\langle \delta(F(x)), \varphi\rangle = \int_S \varphi(x)\frac{dS}{|\nabla_x F(x)|}, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

と定義する．ただし dS は S 上の面積要素である．

この例から分かるように，デルタ関数は関数ではなしに

$$\delta(F(x))dx = \frac{dS}{|\nabla_x F(x)|} \tag{4.18}$$

という測度の形に表すのが自然である．また例 4.4.3 も

$$T(x(y))dy = T(x)J(x)dx$$

と書ける．超関数を分布（あるいは超測度）などというのもこのようなことから来ているのであろう．

例 4.4.4 に関連した計算を続けよう．$\boldsymbol{R}^n$ 上の実数値関数 $F(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ が $\nabla_x F(x) \neq 0$ を満たし，かつ任意の t に対して $S(t) = \{t = F(x)\}$ が閉曲面をなすとする．補題 4.2.9 により $\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{\varphi(x)}{F(x) \pm i\epsilon} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t \pm i\epsilon} dt,$$
$$\psi(t) = \int_{S(t)} \varphi(x(t,u)) \frac{dS(t)}{|(\nabla_x F)(x(t,u))|}$$

である．例 3.6.3 を用いれば

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{F(x) \pm i0}, \varphi(x) \right\rangle &= \mp i\pi\psi(0) + \left\langle \text{p.v.}\, \frac{1}{t}, \psi(t) \right\rangle \\ &= \mp i\pi \int_{S(0)} \varphi(x(0,u)) \frac{dS(0)}{|(\nabla_x F)(x(0,u))|} \\ &\quad + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|t|>\epsilon} \frac{1}{t} \left(\int_{S(t)} \varphi(x(t,u)) \frac{dS(t)}{|(\nabla_x F)(x(t,u))|} \right) dt\end{aligned}$$

となる．右辺第 2 項は

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|F(x)|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{F(x)} dx$$

に等しいから $\left\langle \text{p.v.}\, \dfrac{1}{F(x)}, \varphi(x) \right\rangle$ と書くべきである．よって

例 4.4.5 実数値関数 $F(x) \in C^\infty(\Omega)$ が閉曲面 $S = \{F(x) = 0\}$ (ただし $\nabla_x F(x) \neq 0$) を定義するとき

$$\frac{1}{F(x) \pm i0} = \mp i\pi\delta(F(x))dx + \text{p.v.}\frac{1}{F(x)}. \tag{4.19}$$

特に

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{F(x) - i0} - \frac{1}{F(x) + i0} \right) = \delta(F(x))dx. \tag{4.20}$$

4.5 多変数のフーリエ変換

第 1 章で述べた諸定理はそのまま n 変数のフーリエ変換に対しても成立する．読者は第 1 章を読み返しながら以下の定理の証明を試みてほしい．多重指数を用いることによって n 変数の場合も 1 変数のときと同様に論じられることが分かるであろう．

4.5.1　熱核

第 1 章第 1 節の熱核に対する議論はそのまま多変数の場合に適用できる．n 変数関数に対する合成積を

$$\big(f*g\big)(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x-y)g(y)dy \tag{4.21}$$

によって定義する．第 1 章と同様に次の定理が成り立つ．

定理 4.5.1　$f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$, $g\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$, $p\geq 1$ のとき，a.e. $x\in\boldsymbol{R}^n$ に対して積分 (4.21) は絶対収束し

$$\|f*g\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n)}\leq\|f\|_{L^1(\boldsymbol{R}^n)}\|g\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n)}$$

である．また

$$f*g=g*f$$

である．

補題 1.1.1 により $t>0$ に対して

$$(2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n}(4\pi t)^{-n/2}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}e^{-ix\cdot\xi}dx=(2\pi)^{-n/2}e^{-t|\xi|^2},$$

$$(2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n}(2\pi)^{-n/2}e^{-t|\xi|^2}e^{-ix\cdot\xi}d\xi=(4\pi t)^{-n/2}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

が成り立つ．実際

$$e^{-t|\xi|^2}e^{ix\cdot\xi}=\prod_{k=1}^{n}e^{-t\xi_k^2}e^{ix_k\cdot\xi_k}$$

となることに注意し，補題 1.1.1 を 1 変数ごとに使えばよい．

n 変数の熱核は

$$U_t(x)=(4\pi t)^{-n/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right),\quad t>0 \tag{4.22}$$

によって定義される．

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}U_t(x)dx=1 \tag{4.23}$$

である．

$$u(t,x)=\big(U_t*f\big)(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}U_t(x-y)f(y)dy \tag{4.24}$$

とおく．この積分は $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ に対して $t>0$ のとき収束している．

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u,\quad t>0 \tag{4.25}$$

が成り立つ．ここで Δ はラプラシアン

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \tag{4.26}$$

である．また $t \to 0$ では次の意味で $u_t \to f$ が成り立つ．

定理 4.5.2 (1) $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n),\, p \geq 1$ のとき $\|u_t - f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n)} \to 0$ である．
(2) $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n) \cap C(\boldsymbol{R}^n)$ ならば $t \to 0$ のとき $u_t(x)$ は $f(x)$ に各点収束する．

4.5.2 $\boldsymbol{n}$ 変数のフーリエ変換

$f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ に対してそのフーリエ変換は

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx \tag{4.27}$$

によって定義される．

定理 4.5.3 $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ のとき $\widehat{f}(\xi)$ は連続で，$|\xi| \to \infty$ のとき $\widehat{f}(\xi) \to 0$ である．

証明 多変数のときの計算に慣れるために証明を与えよう．$\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ に対して $\hat{\varphi}(\xi)$ が $|\xi| \to \infty$ のとき 0 に収束することを示そう．変数 x に関するラプラシアンを Δ_x と書けば

$$e^{-ix\cdot\xi} = (1 + |\xi|^2)^{-1}(1 - \Delta_x)e^{-ix\cdot\xi} \tag{4.28}$$

である．これを用いて部分積分を繰り返せば

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx = (1 + |\xi|^2)^{-m} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}(1 - \Delta_x)^m \varphi(x)dx$$

が任意の $m \geq 0$ に対して成り立つ．これより

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq C_m(1 + |\xi|^2)^{-m}, \quad \forall m \geq 0$$

が成り立つから $\hat{\varphi}(\xi) \to 0$ $(|\xi| \to 0)$ が分かる．$C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ は $L^1(\boldsymbol{R}^n)$ で稠密であるから任意の $\epsilon > 0$ に対して $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ が存在し，$\|f - \varphi\|_{L^1(\boldsymbol{R}^n)} < \epsilon$ が成り立つ．よってフーリエ変換の定義により

$$\left|\hat{f}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)\right| \leq (2\pi)^{-n/2}\epsilon$$

である．これより $\hat{f}(\xi) \to 0$ $(|\xi| \to 0)$ が成り立つ． □

等式 (4.28) を用いて部分積分する上の論法はよく使われるので記憶に値する．

定理 4.5.4 $f(x) \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$, $\widehat{f}(\xi) \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ ならフーリエの反転公式

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi$$

が成立する．

この定理の証明は定理 1.1.11 と同様である．

$m=0,1,2,\cdots$ に対してセミノルム

$$p_m(\varphi)=\sup_{x\in\boldsymbol{R}^n}(1+|x|^2)^m\sum_{|\alpha|\le m}\left|\partial_x^\alpha\varphi(x)\right| \tag{4.29}$$

を定義する．$\boldsymbol{R}^n$ 上の**急減少関数の空間** $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ とは $p_m(\varphi)<\infty,\ \forall m\ge 0$ を満たす $\boldsymbol{R}^n$ 上の無限回微分可能関数全体のことである．

$$\varphi_j\to\varphi \text{ in } \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)\Longleftrightarrow \lim_{j\to\infty}p_m(\varphi_j-\varphi)=0,\ \forall m\ge 0$$

と定義する．

定理 4.5.5 $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ は完備である．即ち

$$\lim_{j,k\to\infty}p_m(\varphi_j-\varphi_k)=0,\quad \forall m\ge 0$$

ならば，ある $\varphi\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ が存在し，$\varphi_j\to\varphi$ in $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ が成り立つ．

$f\in C^1(\boldsymbol{R}^n)$ がある $N\ge 0$ に対して

$$|f(x)|+|\partial_{x_j}f(x)|\le C(1+|x|)^N$$

を満たすとき $\varphi\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して部分積分の公式

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\left(\partial_{x_j}f(x)\right)\varphi(x)dx=-\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\left(\partial_{x_j}\varphi(x)\right)dx \tag{4.30}$$

が成り立つ．実際，例えば $j=n$ とし，$x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$ とおけば

$$\begin{aligned}&\int_{-R}^{R}(\partial_{x_n}f(x',x_n))\,\varphi(x',x_n)dx_n\\ &=\Big[f(x',x_n)\varphi(x',x_n)\Big]_{x_n=-R}^{x_n=R}-\int_{-R}^{R}f(x',x_n)\left(\partial_{x_n}\varphi(x',x_n)\right)dx_n.\end{aligned}$$

$\varphi\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ であることにより

$$\left|\Big[f(x',x_n)\varphi(x',x_n)\Big]_{x_n=-R}^{x_n=R}\right|\le C(1+R+|x'|)^{-1}$$

と評価できる．そこで $R\to\infty$ とし，さらに x' で積分すれば (4.30) が得られる．

このことを用い，適宜部分積分を行えば定理 1.3.6 と同様にして次の定理が証明される．

定理 4.5.6 (1) $\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ から $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ への 1 対 1，全射で $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ の意味で連続である．

(2) $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)\ni\varphi$ に対してフーリエの反転公式が成り立つ．

(3) $\varphi(\xi)\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi$$

である．

(4)　$D_x^\alpha = \big(-i\partial_x\big)^\alpha$ とおけば，$\varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\big(\mathcal{F}D_x^\alpha\varphi\big)(\xi) = \xi^\alpha\big(\mathcal{F}\varphi\big)(\xi), \tag{4.31}$$

$$\big(\mathcal{F}x^\alpha\varphi\big)(\xi) = \big(-D_\xi\big)^\alpha\big(\mathcal{F}\varphi\big)(\xi) \tag{4.32}$$

が成り立つ．

$L^2(\boldsymbol{R}^n)$ の内積を

$$(f,g) = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$$

によって定義する．$\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して $(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) = (\varphi, \psi)$ が成り立つ．よって任意の $f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ に対して $\varphi_j \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ が存在し，$\|f-\varphi\|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)} \to 0$ となる．しかも $\widehat{\varphi}_j$ はある g に $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ の意味で収束する．この g を f のフーリエ変換といい，$\mathcal{F}f$ と書く．

定理 4.5.7　フーリエ変換 $\mathcal{F}$ は $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 上のユニタリー作用素である．従って

$$(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) = (f,g), \quad \forall f,g \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$$

であり，また任意の $f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$f = \mathcal{F}^*\mathcal{F}f$$

が成り立つ．

4.5.3　緩増加超関数とそのフーリエ変換

急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ 上の連続な線形汎関数を**緩増加超関数**といい，その全体を $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ と書く．即ち $T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ とは $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ から $\boldsymbol{C}$ への線形写像であって

$$\varphi_j \to \varphi \ \text{ in } \ \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n) \implies \langle T, \varphi_j\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$$

が成り立つことである．

定義 4.5.8　$T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}T = \hat{T}$ を

$$\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$$

によって定義する．

上の定義はパーセバルの等式（定理 4.5.7）を書き換えたものである．実際，T, φ がともに $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に属するときには

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \hat{T}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi)}d\xi = \int_{\boldsymbol{R}^n} T(x)\overline{\varphi(x)}dx$$

である．$\psi = \overline{\mathcal{F}\varphi}$ とおけば，$\overline{\varphi} = \mathcal{F}\psi$ となり，左辺は $\langle \hat{T}, \psi\rangle$，右辺は $\langle T, \hat{\psi}\rangle$ である．定理 4.5.6 によって $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ ならば $\hat{\varphi}_j \to \hat{\varphi}$ in $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ であるから，$\hat{T} \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ である．また $T_j \to T$ in $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ のとき $\hat{T}_j \to \hat{T}$ in $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ となることも上の定義から直ちに分かる．簡単な例をいくつか挙げよう．

例 4.5.9　$f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ または $f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ のとき，f が定める超関数を T_f と書けば，$\hat{T}_f = \hat{f}$ である．

$f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ の場合には定義により

$$\begin{aligned}\langle \hat{T}_f, \varphi\rangle &= \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)dx = (2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n}\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi dx \\ &= \int_{\boldsymbol{R}^n} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)d\xi\end{aligned}$$

となることから分かる．$f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ の場合には f を $g_j(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ で近似すると，$\hat{T}_{g_j} = \hat{g}_j$ であり，$\langle \hat{T}_{g_j}, \varphi\rangle = \langle g_j, \hat{\varphi}\rangle$ において $j \to \infty$ とすれば $\hat{g}_j \to \hat{g}$ in $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ であることから分かる．

例 4.5.10　$\mathcal{F}(\delta(x-a)) = (2\pi)^{-n/2}e^{-i\xi\cdot a}$．特に $\hat{\delta} = (2\pi)^{-n/2}$．

これは

$$\begin{aligned}\langle \hat{\delta}_a, \varphi\rangle &= \langle \delta(\xi - a), \hat{\varphi}\rangle = (2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-ix\cdot a}\varphi(x)dx \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-i\xi\cdot a}\varphi(\xi)d\xi\end{aligned}$$

であることから分かる．

例 4.5.11　$\mathcal{F}x^\alpha = (2\pi)^{n/2}(i\partial_\xi)^\alpha\delta(\xi)$．特に $\hat{1} = (2\pi)^{n/2}\delta(\xi)$．

実際，$x^\alpha\hat{\varphi}(x) = \mathcal{F}(-i\partial_\xi)^\alpha\varphi(\xi)$ であるからフーリエの反転公式により

$$(2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\cdot\xi}x^\alpha\hat{\varphi}(x)dx = (-i\partial_\xi)^\alpha\varphi(\xi).$$

$\xi = 0$ とすれば

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{R}^n} x^\alpha\varphi(x)dx &= (2\pi)^{n/2}(-i\partial_\xi)^\alpha\varphi(\xi)\Big|_{\xi=0} \\ &= \langle (2\pi)^{n/2}\delta(\xi), (-i\partial_\xi)^\alpha\varphi(\xi)\rangle \\ &= \langle (2\pi)^{n/2}(i\partial_\xi)^\alpha\delta(\xi), \varphi(\xi)\rangle\end{aligned}$$

である．これと $\langle \mathcal{F}x^\alpha, \varphi\rangle = \langle x^\alpha, \hat{\varphi}\rangle$ により上の例が計算される．

例 4.5.12　実数値関数 $F(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ が閉曲面 $S = \{F(x) = 0\}$ (ただし $\nabla F(x) \neq 0$) を定義するとき，$\delta(F(x))$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}\left(\delta(F(x))\right) = (2\pi)^{-n/2} \int_S e^{-ix\cdot\xi} \frac{dS}{|\nabla F(x)|}$$

で与えられる．

実際，例 4.4.4 により $T = \delta(F(x))$ とおけば

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \int_S \hat{\varphi}(x) \frac{dS}{|\nabla F(x)|} = (2\pi)^{-n/2} \int_S \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(\xi) \frac{dS}{|\nabla F(x)|} d\xi$$

となるからである．

4.5.4　合成積とフーリエ変換

超関数の演算については次のことに注意すべきである．超関数同士の積や合成積は一般には定義できない．例えば $f(x) = |x|^{-\alpha}$, $g(x) = |x|^{-\beta}$, $\alpha < n$, $\beta < n$, $\alpha + \beta > n$ である場合がそうである．そこで簡単に考察できる場合に限定しよう．

定義 4.5.13　$T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$, $\psi(x) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して $\psi(x)T(x)$, $\big(T * \psi\big)(x)$ を

$$\langle \psi(x)T(x), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \psi(x)\varphi(x) \rangle,$$
$$\langle \big(T * \psi\big)(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle T(y), \int_{\boldsymbol{R}^n} \psi(x - y)\varphi(x) dx \right\rangle$$

$(\varphi(x) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n))$ によって定義する．

上の定義がうまくいっている (well-defined) ことを示すのに，$\psi, \varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ のとき $\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n} \psi(x - y)\varphi(x) dx \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ を示す必要がある．それには次のことに気をつければよい．$m > 0$ のとき

$$(1 + |x|)^m \leq (1 + |x - y| + |y|)^m \leq (1 + |x - y|)^m (1 + |y|)^m$$

であるから

$$(1 + |x - y|)^{-m} \leq (1 + |x|)^{-m} (1 + |y|)^m$$

である．よって

$$(1 + |x - y|)^{-m} (1 + |y|)^{-2m} \leq (1 + |x|)^{-m} (1 + |y|)^{-m}$$

となり $\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n} \psi(x - y)\varphi(x) dx \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ が分かる．また $\varphi_j \to \varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ のとき $\psi\varphi_j \to \psi\varphi$, $\psi * \varphi_j \to \psi * \varphi$ in $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ を示す必要があるが，それも上と同様である．

補題 4.5.14　$\psi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n),\ T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ のとき

$$\mathcal{F}\bigl(T * \psi\bigr) = (2\pi)^{n/2}\hat{\psi}(\xi)\hat{T}(\xi).$$

証明　$\hat{g} = \displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n} \psi(x-y)\hat{\varphi}(x)dx$ とおくと

$$g(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{iy\cdot\xi}\psi(x-y)\hat{\varphi}(x)dxdy = (2\pi)^{n/2}\hat{\psi}(\xi)\varphi(\xi)$$

であるから

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{F}\bigl(T*\psi\bigr),\varphi\rangle = \langle T*\psi,\hat{\varphi}\rangle &= \left\langle T, \int_{\boldsymbol{R}^n}\psi(x-y)\hat{\varphi}(x)dx\right\rangle \\ = \langle T,\hat{g}\rangle = \langle\hat{T},g\rangle &= \langle(2\pi)^{n/2}\hat{\psi}(\xi)\hat{T}(\xi),\varphi(\xi)\rangle\end{aligned}$$

となり，補題が示される．□

$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 K と $\delta > 0$ に対して

$$K_\delta = \bigcup_{x\in K} B(x,\delta), \quad B(x,\delta) = \{y \in \boldsymbol{R}^n\,;\,|x-y| \le \delta\} \tag{4.33}$$

とおく．従って

$$x \notin K_\delta \Longleftrightarrow \operatorname{dist}(x,K) > \delta \tag{4.34}$$

である．

補題 4.5.15　$T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ の台を K とし，$\operatorname{supp}\psi \subset B(0,\delta)$ のとき $\operatorname{supp}\bigl(\psi * T\bigr) \subset K_\delta$.

証明　$\operatorname{supp}(\varphi) = L$ とすれば $\operatorname{supp}(\psi*\varphi) \subset L_\delta$．よって $\operatorname{dist}(K,L) > \delta$ なら $L_\delta \cap K = \emptyset$ だから $\langle\psi * T,\varphi\rangle = \langle T,\psi*\varphi\rangle = 0$ である．□

4.5.5　ペーリー・ウィーナー・シュワルツの定理

$\boldsymbol{C}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $f(\zeta),\ \zeta = (\zeta_1,\cdots,\zeta_n) \in \Omega$ が正則とは各変数 ζ_j ごとに関数 $\zeta_j \to f(\zeta_1,\cdots,\zeta_j,\cdots,\zeta_n)$ が正則であることとする．このとき $f(\zeta)$ は n 変数 ζ の関数として連続であることが分かるが (参考文献 [2], p.48, Hartogs の定理)，証明はかなりの準備を要するので省略する．

$f(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ とそのフーリエ変換の対応を述べた定理 2.2.3 は次のように一般化される．

定理 4.5.16　$g(\zeta)$ は $\boldsymbol{C}^n$ 全体で正則とし，$\sigma > 0$ を定数とするとき次の (1), (2) は同値である．

(1)　$\operatorname{supp} f(x) \subset \{|x| \le \sigma\}$ である $f(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ が存在し，$\boldsymbol{R}^n$ 上で $g(\xi) = \widehat{f}(\xi)$.

(2)　任意の $N > 0$ に対して定数 $C_N > 0$ が存在し，

$$|g(\zeta)| \le C_N(1+|\zeta|)^{-N}e^{\sigma|\operatorname{Im}\zeta|}, \quad \forall\zeta \in \boldsymbol{C}^n.$$

証明　$g(\xi)$ を $f(x)$ の積分で表示し，$e^{-ix\cdot\zeta} = |\zeta|^{-2} i\bar{\zeta} \cdot \nabla_x e^{-ix\cdot\zeta}$ を用いて部分積分すれば (1) $\Longrightarrow$ (2) が分かる．

(2) $\Longrightarrow$ (1) を示すのに $f(x)$ を $g(\xi)$ のフーリエ逆変換とし，$|x| > \sigma$ なら $f(x) = 0$ であることを示す．そのような x に対して $\eta = tx/|x|, t > 0$ とおき積分

$$h(x,\eta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\cdot(\xi+i\eta)} g(\xi + i\eta) d\xi$$

を考える．

$$|e^{ix\cdot(\xi+i\eta)}| = e^{-t|x|}, \quad |g(\xi+i\eta)| \le C_N (1 + |\xi| + t)^{-N} e^{\sigma t}$$

が成り立つことに注意しよう．解析性を用いて 1 変数の積分ごとに積分路を移せば $h(x,\eta) = f(x)$ であることが分かる．一方

$$|h(x,\eta)| \le C_N e^{(\sigma - |x|)t} \int_{\boldsymbol{R}^n} (1 + |\xi|)^{-N} d\xi$$

であることに注意し $t \to \infty$ とすれば，$|x| > \sigma$ のとき $f(x) = h(x,\eta) = 0$ であることが分かる．□

上の定理の超関数への拡張が次の定理である．

定理 4.5.17（ペーリー・ウィーナー・シュワルツの定理）

(1)　$T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ が $\operatorname{supp} T \subset \{|x| \le \sigma\}$ を満たせば $T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ であり，そのフーリエ変換は

$$\hat{T}(\xi) = \langle T(x), (2\pi)^{-n/2} \chi(x) e^{-ix\cdot\xi} \rangle \tag{4.35}$$

で与えられる．ただし $\chi(x)$ は $|x| < \sigma$ で $\chi(x) = 1$ を満たす任意の $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 関数である．これは ξ に関して $\boldsymbol{C}^n$ 全体に解析接続され，ある定数 $C, N > 0$ に対し

$$\left|\hat{T}(\zeta)\right| \le C(1 + |\zeta|)^N e^{\sigma|\mathrm{Im}\,\zeta|}, \quad \forall \zeta \in \boldsymbol{C}^n \tag{4.36}$$

という評価を持つ．

(2)　逆に $\boldsymbol{C}^n$ 全体で正則な関数 $f(\zeta)$ が (4.36) を満たせば，ある超関数 $T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ が存在し，$\operatorname{supp} T \subset \{|x| \le \sigma\}$ であって

$$\langle T(x), \hat{\varphi}(x) \rangle = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(\xi)\varphi(\xi) d\xi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n) \tag{4.37}$$

を満たす．即ち $\widehat{T}(\xi) = f(\xi)$ である．

証明　(1)　$\chi(x)$ を定理の中で与えたものとすれば任意の $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\langle \hat{T}(\xi), \varphi(\xi) \rangle = \langle T(x), \hat{\varphi}(x) \rangle = \langle T(x), \chi(x)\hat{\varphi}(x) \rangle$$

となる．そこで

$$f(\xi) = \langle T(x), (2\pi)^{-n/2}\chi(x)e^{-ix\cdot\xi}\rangle$$

とおく．補題 3.2.6 は n 次元の場合にも成立し，T は有限な階数を持つ．即ちある $N > 0$ が存在し

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in\boldsymbol{R}^n} \sum_{|\alpha|\leq N} |\partial_x^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$$

となる．このことから $f(\xi)$ が評価 (4.36) を持つことが分かる．$\hat{\varphi}(x)$ を積分で書き $\langle T(x), \chi(x)\hat{\varphi}(x)\rangle$ において形式的に積分順序を変えれば $\langle \hat{T}(\xi), \varphi(\xi)\rangle = \langle f(\xi), \varphi(\xi)\rangle$ となり (4.35) が示される．この部分を詳しく述べよう．$\hat{\varphi}(x)$ の積分をリーマン和で近似する．即ち $\boldsymbol{R}^n$ を 1 辺の長さが $1/m$ の立方体に分割し，その中に分点 $\xi_l^{(m)} = l/m \in \boldsymbol{R}^n$ $(l \in \boldsymbol{Z}^n)$ をとって

$$\psi^{(m)}(x) = \sum_l (2\pi)^{-n/2} e^{-ix\cdot\xi_l^{(m)}} \varphi(\xi_l^{(m)}) m^{-n}$$

とおけば $\psi^{(m)}(x)$ は $\{|x| \leq \sigma\}$ において N 階の微分までこめて一様に $\hat{\varphi}(x)$ に収束する．従って

$$\langle T(x), \chi(x)\hat{\varphi}(x)\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle T(x), \chi(x)\psi^{(m)}(x)\rangle$$

である．右辺は

$$\lim_{m\to\infty} \sum_l f(\xi_l^{(m)})\varphi(\xi_l^{(m)})m^{-n} = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

となる．

(2) を示すには, (4.37) によって $T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ を定義し，$\operatorname{supp} T \subset \{|x| \leq \sigma\}$ を証明すればよい．$\chi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ を

$$\operatorname{supp} \chi(x) \subset \{|x| < 1\}, \int_{\boldsymbol{R}^n} \chi(x)dx = 1$$

を満たすものとし，$\chi_\delta(x) = \delta^{-n}\chi(x/\delta)$ とおく．補題 4.5.14 により

$$\mathcal{F}(\chi_\delta * T) = (2\pi)^{n/2}\hat{\chi}_\delta(\xi)\hat{T}(\xi)$$

である．また $\hat{\chi}_\delta(\xi) = \hat{\chi}(\delta\xi)$ であるから $\hat{\chi}_\delta(\xi)$ は $\boldsymbol{C}^n$ 全体に解析接続され

$$|\hat{\chi}_\delta(\zeta)| \leq C_N(1 + |\zeta|)^{-N} e^{\delta|\operatorname{Im}\zeta|}, \quad \forall\zeta \in \boldsymbol{C}^n, \quad \forall N > 0$$

が成り立つ．よって定理 4.5.16 によって $\operatorname{supp}(\chi_\delta * T) \subset \{|x| \leq \sigma + \delta\}$ である．$\hat{\chi}_\delta(\xi) \to (2\pi)^{-n/2}$ であるから補題 4.5.14 によって $\chi * T \to T$ である．よって $\operatorname{supp}\varphi \subset \{|x| > \sigma\}$ のとき $\langle T, \varphi\rangle = 0$ となり，$\operatorname{supp} T \subset \{|x| \leq \sigma\}$ である．□

第 5 章
楕円型方程式

超関数のフーリエ変換を利用してラプラス方程式・ヘルムホルツ方程式のグリーン関数を計算する．さらに一般の定数係数楕円型方程式のパラメトリクスを構成する．ソボレフ空間を用いて楕円型方程式の解の微分可能性を論ずるが，これは微分方程式を超関数を用いて研究するときの原型になる考え方である．

5.1 斉次超関数 *

斉次超関数については第 3 章第 6 節で少し述べたが，ここで多次元の場合を解説しよう．応用上重要な例として $|x|^\lambda$ がある．この超関数は次のような状況で現れる．$\boldsymbol{R}^n$ で方程式 $(-\Delta)^m u = f$ を考えよう．$\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ に属する解 u があるとすれば両辺をフーリエ変換して $|\xi|^{2m}\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$ であるから $\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)/|\xi|^{2m}$．よって

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)}{|\xi|^{2m}}d\xi$$

と書けるであろう．特に $f(x) = \delta(x-y)$ のとき $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}e^{-iy\cdot\xi}$ であるから

$$u(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{e^{i(x-y)\cdot\xi}}{|\xi|^{2m}}d\xi$$

となる．これは $|\xi|^{-2m}$ という（超）関数のフーリエ変換である．しかし $2m \geq n$ のときは $|\xi|^{-2m} \notin L^1_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$ である．このような場合にはどのようにして上のフーリエ変換を意味付けしたらよいであろうか？

5.1.1 デルタ関数再説

Ω を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とし，超関数 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対してその台（サポート，support）を次のように定義する．$x_0 \notin \operatorname{supp} T$ とは x_0 のある近傍 $U \subset \Omega$ が

存在し

$$\langle T, \varphi\rangle = 0, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(U) \tag{5.1}$$

が成り立つことである．

定義 5.1.1 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対して 0 以上の整数 k が存在して

$$|\langle T, \varphi\rangle| \le C_K \sup_{x\in K} \sum_{|\alpha|\le k} |\partial_x^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(K) \tag{5.2}$$

が任意の開集合 $K \subset \Omega$ (ただし $\overline{K}$ は Ω 内のコンパクト集合) に対して成り立つとき有限階数を持つ超関数であるという．(5.2) を満たす最小の整数 k を T の**階数**という．

コンパクト台を持つ超関数は有限階数を持つ．定理 3.2.7 と同様にして次の定理が示される．

定理 5.1.2 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ を原点を含む領域とし，$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ は $\operatorname{supp} T = \{0\}$ を満たすとする．このとき

$$T = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha \partial_x^\alpha \delta(x) \tag{5.3}$$

と書ける．ただし k は T の階数で c_α は定数である．

$\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(x) \in L^1_{loc}(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ が λ 次斉次であるとは $f(tx) = t^\lambda f(x)$ が任意の $t > 0$ と $0 \ne x \in \boldsymbol{R}^n$ に対して成り立つことである．$f(x)$ が λ 次斉次であるとき

$$f(x) = |x|^\lambda f(\omega), \quad \omega = x/|x| \tag{5.4}$$

という形に書ける．実際 $f(tx) = t^\lambda f(x)$ において $t = r$, $x = \omega$ とおけば $f(r\omega) = r^\lambda f(\omega)$ となるからである．

$f(x)$ が λ 次斉次であるとき

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} f(tx)\varphi(x)dx = t^{-n}\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\varphi\left(\frac{x}{t}\right)dx = t^\lambda \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

が任意の $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ と $t > 0$ に対して成り立つ．そこで次のように定義する．

定義 5.1.3 $\lambda \in \boldsymbol{R}$ とする．$T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ が任意の $t > 0$ と任意の $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\langle T(tx), \varphi(x)\rangle = t^{-n}\left\langle T(x), \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right\rangle = t^\lambda \langle T(x), \varphi(x)\rangle$$

を満たすとき λ 次斉次であると呼ぶ．

補題 5.1.4 任意の α に対して $\partial_x^\alpha \delta(x)$ は $-n-|\alpha|$ 次斉次である．

証明 次のように計算すればよい．

$$\begin{aligned} t^{-n}\left\langle \partial_x^\alpha \delta(x), \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right\rangle &= (-1)^{|\alpha|}t^{-n}\left\langle \delta(x), \partial_x^\alpha \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}t^{-n-|\alpha|}\left\langle \delta(x), (\partial_x^\alpha \varphi)\left(\frac{x}{t}\right)\right\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}t^{-n-|\alpha|}\left(\partial_x^\alpha \varphi\right)(0) \\ &= t^{-n-|\alpha|}\langle \delta(x), \varphi(x)\rangle. \quad \square \end{aligned}$$

5.1.2 斉次超関数の拡張

$\lambda \in \boldsymbol{R}$ とし $f(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ が λ 次斉次であるとしよう．$f(x) \in L^1_{loc}(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ であるから $f(x)$ は $\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ 上の超関数とみなすことができる．それも $f(x)$ で表すことにする．$f(x)$ を $\boldsymbol{R}^n$ 上に拡張した超関数 $E_f(x)$ とは

$$\langle E_f(x), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), \varphi(x)\rangle, \quad \forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}) \tag{5.5}$$

を満たす超関数 $E_f(x) \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ のことである．超関数の拡張は存在するとは限らないし，また一意的とも限らないのだが，次の補題にみるような制限がつく．

補題 5.1.5 (1) λ 次斉次な $f(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ を $\boldsymbol{R}^n$ に拡張した超関数は有限な階数を持つ．

(2) $E_f^{(1)}(x), E_f^{(2)}(x) \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ を $f(x)$ の $\boldsymbol{R}^n$ への拡張とし，それらの階数が k 以下ならば定数 a_α, $|\alpha| \le k$ が存在し

$$E_f^{(1)}(x) - E_f^{(2)}(x) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \partial_x^\alpha \delta(x) \tag{5.6}$$

が成り立つ．

証明 $\chi_0(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ で $\chi_0(x) = 1$ $(|x| < 1)$, $\chi_0(x) = 0$ $(|x| > 2)$ を満たすものをとり，$\chi_\infty(x) = 1 - \chi_0(x)$ とおく．$f(x)$ の $\boldsymbol{R}^n$ への拡張 $E_f(x)$ を 2 つに分解する：$E_f(x) = \chi_0(x)E_f(x) + \chi_\infty(x)E_f(x)$. $\chi_0(x)E_f(x)$ はコンパクト台を持つ超関数であるから定義 4.3.1 によりその階数はある整数 k 以下である．$\chi_\infty(x)$ の台は原点から離れているから任意の $\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ に対し

$$\langle \chi_\infty(x)E_f(x), \varphi(x)\rangle = \langle E_f(x), \chi_\infty(x)\varphi(x)\rangle = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\chi_\infty(x)\varphi(x)dx$$

である．従って $\chi_\infty(x)E_f(x)$ の階数は 0 である．よって $E_f(x)$ の階数は k 以下である．また $\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ に対して

$$\langle E_f(x), \varphi(x)\rangle = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

であるから，$E_f^{(1)}(x)-E_f^{(2)}(x)$ の台は $\{0\}$ である．そこで定理 5.1.2 を用いればこの補題が示される． □

補題 5.1.6 $-n<\lambda<0$ のとき λ 次斉次な $f(x)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\})$ の $\boldsymbol{R}^n$ への拡張であってかつ λ 次斉次である超関数は

$$\langle T_f,\varphi\rangle=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\varphi(x)dx,\quad \varphi\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n) \tag{5.7}$$

というものしかない．

証明 補題 5.1.5 により $f(x)$ の $\boldsymbol{R}^n$ への拡張 $E_f(x)$ は

$$E_f(x)=T_f(x)+\sum_{|\alpha|\le k}a_\alpha\partial_x^\alpha\delta(x)$$

と書ける．定義 5.1.3 により任意の $\varphi(x)\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned}t^{\lambda+n}\langle E_f(x),\varphi(x)\rangle&=\langle E_f(x),\varphi(x)\rangle\\&=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\varphi\left(\frac{x}{t}\right)dx+\sum_{|\alpha|\le k}a_\alpha t^{-|\alpha|}\left(\partial_x^\alpha\varphi\right)(0)\end{aligned}$$

となる．$t\to 0$ のとき $\varphi(x/t)\to 0$ であることに注意すれば右辺第 1 項は 0 に近づく．$n+\lambda>0$ であるから左辺も 0 に近づく．よって $a_\alpha=0,\ |\alpha|\le k$ が分かる． □

斉次な超関数の次数 λ に関する解析接続を考えよう．

$$f_\lambda(x)=r^\lambda g(\omega),\quad r=|x|,\quad \omega=\frac{x}{r}$$

とおく．$g(\omega)$ は λ によらない S^{n-1} 上の C^∞ 関数である．この $f_\lambda(x)$ の $\boldsymbol{R}^n$ への拡張を構成しよう．まず $\lambda>-n$ とする．任意の $\varphi(x)\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$h(r)=\int_{S^{n-1}}g(\omega)\varphi(r\omega)d\omega$$

とおけば

$$\langle f_\lambda(x),\varphi(x)\rangle=\int_0^\infty r^{\lambda+n-1}h(r)dr$$

である．この式の解析接続を考える．右辺を

$$\int_0^1 r^{\lambda+n-1}h(r)dr+\int_1^\infty r^{\lambda+n-1}h(r)dr$$

と分ければ，右辺第 2 項は λ の整関数である．

$$h(r)=\sum_{k=0}^N\frac{r^k}{k!}h^{(k)}(0)+\frac{r^{N+1}}{N!}\int_0^1(1-t)^Nh^{(N+1)}(tr)dt$$

と変形すれば

$$\int_0^1 r^{\lambda+n-1}h(r)dr$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{h^{(k)}(0)}{\lambda+n+k} + \int_0^1 \int_0^1 r^{\lambda+n+N}\frac{(1-s)^N}{N!}h^{(N+1)}(tr)dtdr \tag{5.8}$$

となる．この式の右辺第 2 項は $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-N-1$ まで解析接続される．

$$h^{(k)}(0) = \int_{S^{n-1}} g(\omega)\Big(\big(\omega\cdot\nabla_x\big)^k\varphi\Big)(0)d\omega$$

であるから，(5.8) の第 1 項は一般に $\lambda = -n, -n-1, \cdots$ に 1 位の極を持つ．以上により次の定理が示された．

定理 5.1.7 $f(x) = r^\lambda g(\omega)$ という斉次関数は $\lambda \neq -n, -n-1, -n-2, \cdots$ のとき $\boldsymbol{R}^n$ 上の超関数に拡張される．この超関数は λ に関して有理型であり，$\lambda = -n, -n-1, -n-2, \cdots$ に 1 位の極を持つ．$\lambda = -n-k$ における留数は

$$\int_{S^{n-1}} g(\omega)\,(-\omega\cdot\nabla_x)^k\,\delta(x)\,d\omega$$

という超関数である．

特に $g(\omega) = 1$ の場合には $\lambda = -n-k$, $k = 1, 3, 5, \cdots$ における留数は (奇関数の積分であるから) 0 になる．従って次の系が得られる．

系 5.1.8 $f(x) = r^\lambda$ という斉次関数は $\lambda \neq -n, -n-2, -n-4, \cdots$ のとき $\boldsymbol{R}^n$ 上の超関数に拡張される．この超関数は λ に関して有理型であり，$\lambda = -n, -n-2, -n-4, \cdots$ に 1 位の極を持つ．特に $\lambda = -n$ における留数は

$$\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\,\delta(x)$$

である．

5.1.3 主値超関数

定理 5.1.7 の証明を振り返れば次のことが分かる．$\displaystyle\int_{S^{n-1}} g(\omega)d\omega = 0$ のとき，$\mathrm{Re}\,\lambda > -n$ のときに定義された超関数 $f_\lambda(x) = |x|^\lambda g(\omega)$ は $\lambda = -n$ まで解析接続され，それは $\varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\langle f_{-n}(x), \varphi(x)\rangle$$
$$= \int_0^1 \int_{|x|<1} \frac{g(\omega)}{|x|^{n-1}}\,(\omega\cdot\nabla_x\varphi)\,(tx)dtdx + \int_{|x|>1}\frac{g(\omega)}{|x|^n}\varphi(x)dx \tag{5.9}$$

$(\omega = x/|x|)$ で与えられる．そこで

$$\left\langle \mathrm{p.v.}\,\frac{g(\omega}{|x|^n}, \varphi(x)\right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}\frac{g(\omega)}{|x|^n}\varphi(x)dx \tag{5.10}$$

で定義される超関数を考えよう．$h(r) = \displaystyle\int_{S^{n-1}} g(\omega)\varphi(r\omega)d\omega$ とおけば

$\displaystyle\int_{S^{n-1}} g(\omega)d\omega = 0$ のとき

$$h(r) = r\int_0^1 \int_{S^{n-1}} g(\omega)\left(\omega\cdot\nabla_x\varphi\right)(tr\omega)dtdr$$

となるから (5.9) と (5.10) の表示は一致することが分かる．よって次の補題が得られた．

補題 5.1.9 $\displaystyle\int_{S^{n-1}} g(\omega)d\omega = 0$ のとき $|x|^{\lambda}g(\omega)$ の $\lambda = -n$ への解析接続は (5.10) で定義される超関数であり，(5.9) という表示を持つ．

5.1.4 有用な補題

次の補題は簡単だが役に立つ．

補題 5.1.10 $\chi(x) \in C^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$ が $\chi(x) = 1$ $(|x| < 1)$, $\chi(x) = 0$ $(|x| > 2)$ を満たすとき，$\chi_{\epsilon}(x) = \chi(\epsilon x)$ とおけば任意の α に対して定数 C_{α} が存在し

$$|\partial_x^{\alpha}\chi_{\epsilon}(x)| \le C_{\alpha}(1+|x|)^{-|\alpha|}$$

がすべての $0 < \epsilon < 1$ と $x \in \boldsymbol{R}^n$ に対して成り立つ．

証明 $\alpha \neq 0$ とする．$\partial_x^{\alpha}\chi_{\epsilon}(x) = \epsilon^{|\alpha|}\left(\partial_x^{\alpha}\chi\right)(\epsilon x)$ であるが，$\left(\partial_x^{\alpha}\chi\right)(\epsilon x) \neq 0$ のとき $1 \le \epsilon|x| \le 2$ であるから

$$|\partial_x^{\alpha}\chi_{\epsilon}(x)| \le \left(2^{|\alpha|}\sup_{x\in\boldsymbol{R}^n}|\partial_x^{\alpha}\chi(x)|\right)|x|^{-\alpha}$$

となる．よって $|\partial_x^{\alpha}\chi_{\epsilon}(x)| \le C_{\alpha}(1+|x|)^{-|\alpha|}$ が $|x| \ge 1$ で成り立ち，また $|\partial_x^{\alpha}\chi_{\epsilon}(x)| \le \epsilon^{|\alpha|}\sup_{x\in\boldsymbol{R}^n}|\partial_x^{\alpha}\chi(x)|$ より $|\partial_x^{\alpha}\chi_{\epsilon}(x)| \le C_{\alpha}$ が $0 < \epsilon < 1$ と $x \in \boldsymbol{R}^n$ に対して成り立つ．これらのことから補題が成立する． □

補題 5.1.11 (1) $|e^{it}-1| \le |t|$, $\forall t \in \boldsymbol{R}$.

(2) $0 < \alpha < 1$ のとき $|e^{it}-1| \le 2^{1-\alpha}|t|^{\alpha}$, $\forall t \in \boldsymbol{R}$.

証明 単位円周上で円弧と弦を比較すれば $|t| < \pi$ のとき $|e^{it}-1| \le |t|$ が分かる．$|t| > 2$ のとき $|e^{it}-1| \le |t|$ であるから (1) が示される．また (1) より $|e^{it}-1|^{\alpha} \le |t|^{\alpha}$ である．明らかな不等式 $|e^{it}-1| \le 2$ より $|e^{it}-1|^{1-\alpha} \le 2^{1-\alpha}$ である．これらをかけて (2) が成り立つ． □

$f(x) \in C^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$ がある $\mu > 0$ に対して

$$|\partial_x^{\alpha}f(x)| \le C_{\alpha}(1+|x|)^{-\mu-|\alpha|}, \quad \forall\alpha, \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^n \tag{5.11}$$

を満たすとしよう．ここで C_{α} は定数である．

補題 5.1.12 補題 5.1.10 で述べた関数 $\chi_{\epsilon}(x)$ をとり，(5.11) を満たす $f(x)$ に対して $f_{\epsilon}(x) = \chi_{\epsilon}(x)f(x)$ とおくと，$f_{\epsilon}(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}_{\epsilon}(\xi)$ は次の性

質を持つ．

(1) 任意の α, $N>0$ に対して $0<\epsilon<1$ によらない定数 $C_{\alpha,N}>0$ が存在し

$$|\partial_\xi^\alpha \hat{f}_\epsilon(\xi)| \le C_{\alpha,N}|\xi|^{-N}, \quad |\xi|>1.$$

(2) $0<\nu<\mu$ とすれば $0<\epsilon<1$ によらない定数 C_ν が存在し

$$|\hat{f}_\epsilon(\xi)| \le C_\nu|\xi|^{-n+\nu}, \quad |\xi|\le 1.$$

(3) $\xi\neq 0$ のとき $\lim_{\epsilon\to 0}\hat{f}_\epsilon(\xi)$ は各点収束し，その極限 $g(\xi)$ は (1), (2) の評価を持つ．さらに $g(\xi)$ は $f(x)$ の超関数の意味のフーリエ変換に等しい．

証明 $\theta=\xi/|\xi|$ とおき微分作用素 $\theta\cdot\nabla_x=\sum_{j=1}^n|\xi|^{-1}\xi_j\partial_{x_j}$ を考えれば

$$e^{-ix\cdot\xi}=i|\xi|^{-1}\theta\cdot\nabla_x e^{-ix\cdot\xi}$$

である．よって部分積分により

$$\hat{f}_\epsilon(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}\left(-i|\xi|^{-1}\theta\cdot\nabla_x\right)^N f_\epsilon(x)dx \tag{5.12}$$

となる．補題 5.1.10 と (5.11) によって

$$|\partial_x^\alpha f_\epsilon(x)|\le C_\alpha(1+|x|)^{-\mu-|\alpha|}$$

であるから $N\ge n$ のとき，$|\hat{f}_\epsilon(\xi)|\le C_N|\xi|^{-N}$ $(|\xi|\ge 1)$ が成り立つことが分かる．$\alpha\neq 0$ のときも同様にして (1) が示される．(5.12) で $N=n$ とすれば $\hat{f}_\epsilon(\xi)$ は

$$|\xi|^{-n}\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}\theta\cdot\nabla_x g_\epsilon(x,\theta)dx, \quad \theta\in S^{n-1},$$

$$|g_\epsilon(x,\theta)|\le C(1+|x|)^{-(n-1)-\mu}$$

という項の和で書ける．補題 5.1.11 (2) より

$$|e^{-ix\cdot\xi}-1|\le C_\nu\left(|x||\xi|\right)^\nu$$

を用いれば $|\xi|<1$ のとき

$$|\xi|^{-n}\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}\theta\cdot\nabla_x g_\epsilon(x,\theta)dx=|\xi|^{-n}\int_{\boldsymbol{R}^n}\theta\cdot\nabla_x g_\epsilon(x,\theta)dx+O(|\xi|^{-n+\nu})$$

である．$\theta\cdot\nabla_x=\partial_{y_1}$ となるように線形の変数変換 $x\to y$ をし，$h(y)=g_\epsilon(x,\theta)$ とおけば

$$\int_{|y_1|<R}\partial_{y_1}h(y)dy_1=h(R,y')-h(-R,y')$$

であり $|h(\pm R,y')|\le C(1+R+|y'|)^{-(n-1)-\mu}$ であるから

$$\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} |h(R,y') - h(-R,y')|dy' \to 0, \quad R \to \infty$$

である．よって

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \theta \cdot \nabla_x g_\epsilon(x,\theta)dx = 0$$

であるから (2) が示された．

$f_\epsilon(x)$ の微分は $\chi_\epsilon(x)$ の微分と $f(x)$ の微分との積からなるが $(\partial_x^\alpha \chi)(\epsilon x)$ は $\alpha = 0$ のとき 1 に，$\alpha \neq 0$ のとき 0 に収束する．よって (5.12) で $\epsilon \to 0$ とすれば $\hat{f}_\epsilon(\xi)$ は各点収束することが分かる．$f_\epsilon(x) \to f(x)$ in $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ であるから，$\langle \hat{f}_\epsilon, \varphi \rangle = \langle f_\epsilon, \hat{\varphi} \rangle$ において $\epsilon \to 0$ とすればルベーグの定理から $\langle g, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$ となる．よって $g(\xi)$ は $f(x)$ の超関数の意味のフーリエ変換に等しい． □

5.1.5 球対称超関数

$f(x) \in L^1_{loc}(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ が球対称であるとは

$$f(Rx) = f(x) \quad \text{a.e. } x \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}, \quad \forall R \in O(n) \tag{5.13}$$

が成り立つことである．ここで $O(n)$ は $n \times n$ 次実直交行列全体である．(5.13) はある $F \in L^1_{loc}((0,\infty))$ が存在し

$$f(x) = F(|x|) \quad \text{a.e. } x \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\} \tag{5.14}$$

が成り立つことと同値である．実際 (5.14) から (5.13) が従うことは明らかである．逆に (5.13) が成り立つとき，任意の $x \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ に対して $Rx = (|x|, 0, \cdots, 0)$ となる $R \in O(n)$ をとれば $f(Rx) = f(|x|, 0, \cdots, 0)$ となるから $F(r) = f(r, 0, \cdots, 0)$ ととればよい．

(5.13) から任意の $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(Rx) \rangle, \quad \forall R \in O(n)$$

である．そこで次の定義を設ける．

定義 5.1.13 $T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ が球対称であるとは

$$\langle T(Rx), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(Rx) \rangle = \langle T(x), \varphi(x) \rangle, \quad \forall R \in O(n)$$

が成り立つことである．

補題 5.1.14 $T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ が球対称なら $\hat{T}$ も球対称である．

証明 $R \in O(n)$ に対して $R\xi \cdot x = {}^t Rx \cdot \xi$ であるから

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(R\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-i\,{}^t Rx \cdot \xi} \varphi(x)dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-iy\cdot\xi} \varphi(Ry)dy\end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\langle \hat{T}(\xi), \varphi(\xi)\rangle &= \langle T(x), \hat{\varphi}(x)\rangle = \langle T(x), \hat{\varphi}(Rx)\rangle \\ &= \langle T(x), \big(\mathcal{F}\varphi(R\xi)\big)(x)\rangle = \langle \hat{T}(\xi), \varphi(R\xi)\rangle\end{aligned}$$

であるから補題が示された． □

5.1.6 斉次超関数のフーリエ変換

斉次関数の計算のために補題を 2 つ準備する．

補題 5.1.15 $T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ が λ 次斉次のとき $\hat{T}$ は $-n-\lambda$ 次斉次である．

証明 $\varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して $(\mathcal{F}\varphi(\xi/t))(x) = t^n(\mathcal{F}\varphi)(tx)$ であるから

$$\begin{aligned}\langle \hat{T}(t\xi), \varphi(\xi)\rangle &= t^{-n}\left\langle T(x), \left(\mathcal{F}\varphi\left(\frac{\xi}{t}\right)\right)(x)\right\rangle \\ &= \langle T(x), \hat{\varphi}(tx)\rangle \\ &= t^{-n}\left\langle T\left(\frac{x}{t}\right), \hat{\varphi}(x)\right\rangle\end{aligned}$$

である．T は λ 次斉次だから

$$\langle \hat{T}(t\xi), \varphi(\xi)\rangle = t^{-n-\lambda}\langle T(x), \hat{\varphi}(x)\rangle = t^{-n-\lambda}\langle \hat{T}(\xi), \varphi(\xi)\rangle$$

であり，補題が示された． □

補題 5.1.16 $-n < \lambda < 0$ とし，$f(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ は λ 次斉次とする．このとき $\hat{f}(\xi)$ は $-n-\lambda$ 次斉次であって $\hat{f}(\xi) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ である．また $\displaystyle\int_{S^{n-1}} f(\omega)dS = 0$ ならば $\displaystyle\int_{S^{n-1}} \hat{f}(\omega)dS = 0$ である．

証明 $\chi_0(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ で $\chi_0(x) = 1$ $(|x| < 1)$, $\chi(x) = 0$ $(|x| > 2)$ を満たすものをとり，$\chi_\infty(x) = 1 - \chi_0(x)$ とおく．$\chi_0(x)f(x)$ は可積分でコンパクト台を持つからそのフーリエ変換は有界な C^∞-関数である．また $\chi_\infty(x)f(x)$ は補題 5.1.12 の仮定を満たすからそのフーリエ変換は補題 5.1.12 の (1), (2) の評価を持つ．よって $\hat{f}(\xi) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}) \cap L^1_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$ が分かった．$\hat{f}(\xi)$ が $-n-\lambda$ 次斉次であることは補題 5.1.15 から分かる．$f(x) = |x|^\lambda g(\omega)$ $(\omega = x/|x|)$, $\hat{f}(\xi) = |\xi|^{-n-\lambda}h(\theta)$ $(\theta = \xi/|\xi|)$ とおくことができるが，球対称な $\varphi(|x|) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ をとればそのフーリエ変換も球対称でありそれを $\psi(|\xi|)$ とおくと

$$\int_0^\infty\int_{S^{n-1}} r^\lambda g(\omega)\psi(r)r^{n-1}drd\omega = \int_0^\infty\int_{S^{n-1}} \rho^{-n-\lambda}h(\theta)\varphi(\rho)\rho^{n-1}d\rho d\theta$$

である．これより $\displaystyle\int_{S^{n-1}} g(\omega)d\omega = 0$ なら $\displaystyle\int_{S^{n-1}} h(\theta)d\theta = 0$ である． □

さて $|x|^\lambda$ のフーリエ変換を計算しよう．

例 5.1.17 $-n < \lambda < 0$ のとき

$$\mathcal{F}\left(|x|^\lambda\right) = 2^{\lambda+\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}|\xi|^{-n-\lambda}.$$

実際，$\mathcal{F}(|x|^\lambda)$ は補題 5.1.14, 5.1.16 により球対称な $-n-\lambda$ 次斉次関数である．よってそれは $C|\xi|^{-n-\lambda}$ という形をしている．$\mathcal{F}(e^{-|\xi|^2}) = 2^{-n/2}e^{-|x|^2/4}$ であるから

$$\langle |x|^\lambda, \mathcal{F}e^{-|\xi|^2}\rangle = \langle \mathcal{F}|x|^\lambda, e^{-|\xi|^2}\rangle = C\langle |\xi|^{-n-\lambda}, e^{-|\xi|^2}\rangle$$

より

$$2^{-n/2}\int_0^\infty r^{\lambda+n-1}e^{-r^2/4}dr = C\int_0^\infty \rho^{-\lambda-1}e^{-\rho^2}d\rho$$

となり，これから C の値が計算できる．

例 5.1.18 $L(\omega) \in C^\infty(S^{n-1})$ は $\displaystyle\int_{S^{n-1}} L(\omega)d\omega = 0$ を満たすとする．超関数 p.v. $\dfrac{L(\omega)}{|x|^n} \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ を (5.10) によって定義する．このとき

$$\mathcal{F}\left(\text{p.v.}\,\frac{L(\omega)}{|x|^n}\right) = K(\xi) \tag{5.15}$$

となる．ただし $K(\xi)$ は 0 次斉次で $K(\xi) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ であり，$\displaystyle\int_{S^{n-1}} K(\theta)d\theta = 0$ である．

まず $T = \text{p.v.}\,\dfrac{L(\omega)}{|x|^n} \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ は $-n$ 次斉次であることに注意しよう．補題 5.1.15 によりそのフーリエ変換は 0 次斉次である．$\chi_0(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ を $\chi_0(x) = 1$ $(|x| < 1)$, $\chi_0(x) = 0$ $(|x| > 2)$ となるようにとり，$T_1 = \chi_0(x)T$, $T_2 = (1-\chi_0(x))T$ とおく．T_1 はコンパクト台を持つ超関数であるからそのフーリエ変換は解析関数である．補題 5.1.12 と同様の計算によって $\hat{T}_2(\xi) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ であることが分かる．よって $\hat{T}(\xi) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ である．$\hat{T}(\xi)$ は 0 次斉次だから

$$\hat{T}(\xi) = K(\xi/|\xi|), \quad K(\theta) \in C^\infty(S^{n-1})$$

と書ける．$\psi(x) = e^{-|x|^2}$ ととれば

$$\langle T(x), \psi(x)\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^\infty \frac{e^{-r^2}}{r}dr\int_{S^{n-1}} L(\omega)d\omega = 0$$

である．$\hat{\varphi}(x) = e^{-|x|^2}$ とすれば $\varphi(\xi) = Ce^{-|\xi|^2/4}$ であるから

$$\begin{aligned}0 = \langle \hat{T}(\xi), \varphi\rangle &= C\int_{\boldsymbol{R}^n} K(\xi/|\xi|)e^{-|\xi|^2}d\xi \\ &= C\int_0^\infty e^{-r^2}r^{n-1}dr\int_{S^{n-1}} K(\theta)d\theta\end{aligned}$$

であり $\displaystyle\int_{S^{n-1}} K(\theta)d\theta = 0$ が分かる．□

例 5.1.19

$$\mathcal{F}\Big(\text{p.v.}\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\Big) = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2^{n/2}\,\Gamma\Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)}\frac{\xi_j}{|\xi|}$$

$\displaystyle\int_{S^{n-1}} \frac{x_j}{|x|}d\omega = 0$ であるから例 5.1.18 が適用できる．$\epsilon > 0$ のとき

$$\partial_{x_j}\frac{1}{|x|^{n-1-\epsilon}} = -(n-1-\epsilon)\frac{x_j}{|x|^{n+1-\epsilon}} \tag{5.16}$$

であることを示そう．$\varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\Big\langle \partial_{x_j}\frac{1}{|x|^{n-1-\epsilon}}, \varphi(x) \Big\rangle = -\int_{\boldsymbol{R}^n} |x|^{-(n-1-\epsilon)}\partial_{x_j}\varphi(x)dx$$

であるが，右辺の積分範囲を $|x| > \delta$ と $|x| < \delta$ の範囲に分割すると，$|x| < \delta$ での積分は $\delta \to 0$ のとき 0 に近づく．定理 4.2.4 によって

$$\begin{aligned} -\int_{|x|>\delta} |x|^{-(n-1-\epsilon)}\partial_{x_j}\varphi(x)dx &= \int_{|x|=\delta} |x|^{-(n-1-\epsilon)}\frac{x_j}{|x|}\varphi(x)dS \\ &\quad + \int_{|x|>\delta} \Big(\partial_{x_j}|x|^{-(n-1-\epsilon)}\Big)\,\varphi(x)dx \end{aligned}$$

であるが，$|x| = \delta$ 上の面積要素 dS は単位球面上の面積要素 $d\omega$ を用いて $dS = \delta^{n-1}d\omega$ と書けるから右辺第 1 項は

$$\delta^{\epsilon}\int_{S^{n-1}} \omega_j\varphi(\delta\omega)d\omega$$

となり，$\delta \to 0$ のとき 0 に近づく．よって (5.16) が示された．(5.16) で $\epsilon \to 0$ として補題 5.1.9 を考慮すれば

$$\partial_{x_j}\frac{1}{|x|^{n-1}} = -(n-1)\,\text{p.v.}\,\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$$

である．両辺をフーリエ変換して

$$i\xi_j\mathcal{F}\Big(\frac{1}{|x|^{n-1}}\Big) = -(n-1)\mathcal{F}\Big(\text{p.v.}\,\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\Big)$$

となるから左辺に例 5.1.17 を適用すればよい．

例 5.1.20 $K(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ は 0 次斉次で $\displaystyle\int_{S^{n-1}} K(\omega)d\omega = 0$ とする．このとき $L(\theta) \in C^\infty(S^{n-1})$ で

$$\mathcal{F}\big(K(x)\big) = \text{p.v.}\,|\xi|^{-n}L(\theta), \qquad \int_{S^{n-1}} L(\theta)d\theta = 0$$

を満たすものが唯 1 つ存在する．

$g_\delta(x)=|x|^{-\delta}K(\omega)$ とおき，$\chi(x)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ を $\chi(x)=1$，$|x|<1$ を満たすようにとる．$g_\delta(x)\to K(\omega)$ in $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ であるから，$\mathcal{F}(g_\delta(x))\to\mathcal{F}(K(\omega))$ in $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ である．$f_\delta(\xi)=\mathcal{F}(g_\delta(x))$ は $-n+\delta$ 次斉次であるから $f_\delta(\xi)=|\xi|^{-n+\delta}L_\delta(\theta)$, $\theta=\xi/|\xi|$ と書ける．$\chi(x)g_\delta(x)$ はコンパクトな台を持つから $\mathcal{F}(\chi(x)g_\delta(x))$ は微分までこめて一様収束している．$\mathcal{F}(1-\chi(x))g_\delta(x))$ に対しては補題 5.1.12 と同様の部分積分を行えば $|\xi|=1$ の近傍で微分までこめて一様収束している．よって $L_\delta(\theta)$ はある $L(\theta)\in C^\infty(S^{n-1})$ に微分までこめて一様収束している．よって $\mathcal{F}(K(\omega))=\mathrm{p.v.}\,|\xi|^{-n}L(\theta)$ である．$\displaystyle\int_{S^{n-1}}L(\theta)d\theta=0$ の証明は例 5.1.18 と同様である．一意性を示すには $\varphi(\xi)=a(|\xi|)b(\theta)$ という形の元に対する超関数の値を計算してみればよい． □

5.2 基本解

5.2.1 基本解の定義

$\boldsymbol{R}^n$ での定数係数の線形微分方程式は

$$\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha D_x^\alpha u=f,\quad a_\alpha\in\boldsymbol{C} \tag{5.17}$$

という形に書ける．ここで D_x は

$$D_x=\left(\frac{1}{i}\partial_{x_1},\cdots,\frac{1}{i}\partial_{x_n}\right) \tag{5.18}$$

という記号である．$\xi\in\boldsymbol{R}^n$ に関する多項式

$$P(\xi)=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha\xi^\alpha \tag{5.19}$$

を用いれば，(5.17) は ξ を D_x に置き換えて

$$P(D_x)u=f \tag{5.20}$$

と書ける．このような記号を用いる理由は，(5.20) をフーリエ変換すれば定理 4.5.6 により

$$P(\xi)\hat{u}(\xi)=\hat{f}(\xi) \tag{5.21}$$

となるからである．重複になるが超関数の意味の解の定義を思い起こしておこう．$u\in\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ が $P(D_x)u=f$ を満たすとは

$$\langle u,P(D_x)\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n) \tag{5.22}$$

が成り立つことである．$u\in\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ のときには $f\in\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ となり (5.22) は $\varphi\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して成り立つ．

$$P(D_x)T = \delta \tag{5.23}$$

を満たす $T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ を方程式 (5.20) の**基本解** (fundamental solution) という．**素解** (elementary solution) ということもある．基本解 T が求まれば合成積 $u = T * f$ は (5.20) の解の 1 つである．このことをまず形式的に示そう．

$$u(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} T(x-y)f(y)dy \tag{5.24}$$

と通常の積分のように表す．$P(D_x)T(x) = \delta(x)$ であるから $x' = x - y$ とおくと

$$\partial_{x_j} = \partial_{x'_j}$$

であることより $D_x = D_{x'}$ である．そこで $P(D_{x'})T(x') = \delta(x')$ において $x' = x - y$ とすることにより $P(D_x)T(x-y) = \delta(x-y)$ となる．両辺に $f(y)$ をかけて積分すれば $P(D_x)u(x) = f(x)$ となる．

5.2.2 コンパクトな台を持つ超関数と合成積

上の議論を正当化する方法はこれまで述べてきたことによってほぼ明らかであろう．そのためにコンパクトな台を持つ超関数について少し述べよう．

定義 5.2.1 $\mathcal{E}(\boldsymbol{R}^n)$ とは集合 $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ に次のような位相を入れた空間である．$\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{E}(\boldsymbol{R}^n)$ とは，任意のコンパクト集合 $K \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$\sup_{x \in K} \left|\partial_x^\alpha \big(\varphi_j(x) - \varphi(x)\big)\right| \to 0, \quad j \to \infty, \quad \forall \alpha$$

が成り立つことである．

定義 5.2.2 $\mathcal{E}(\boldsymbol{R}^n)$ 上の連続な線形汎関数の全体を $\mathcal{E}'(\boldsymbol{R}^n)$ と書く．即ち

$$\varphi_j \to \varphi \text{ in } \mathcal{E}(\boldsymbol{R}^n) \Longrightarrow \langle T, \varphi_j \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$$

を満たす線形汎関数 T の全体である．$T_j \to T$ in $\mathcal{E}'(\boldsymbol{R}^n)$ を

$$\langle T_j, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(\boldsymbol{R}^n)$$

と定義する．

$\mathcal{E}'(\boldsymbol{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ であることは定義から明らかであろう．$T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ がコンパクトな台を持てば $T \in \mathcal{E}'(\boldsymbol{R}^n)$ である．実際 $\chi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ で $\operatorname{supp} T$ 上 $\chi(x) = 1$ を満たすものをとり

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(\boldsymbol{R}^n)$$

と定義すればよい．右辺は $\chi(x)$ の取り方によらない．特に定理 4.5.17 によりコンパクト台を持つ超関数 $T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ のフーリエ変換は

$$\hat{T}(\xi) = \langle T(x), (2\pi)^{-n/2} e^{-ix\cdot\xi} \rangle \tag{5.25}$$

で与えられる．

実は次の興味深い定理が成り立つ．

定理 5.2.3 $\mathcal{E}'(\boldsymbol{R}^n)$ の元はコンパクトな台を持つ．

この定理の証明は省略するが，例えば参考文献 [5]，p.81 にある．

補題 5.2.4 (1) $T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ の台がコンパクトであるとき，$\varphi \in \mathcal{E}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\bigl(T \odot \varphi\bigr)(x) = \langle T(y), \varphi(x+y) \rangle$$

と定義すれば $T \odot \varphi \in \mathcal{E}(\boldsymbol{R}^n)$ である．さらに $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ なら $T \odot \varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ である．

(2) $T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$, $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ なら同様に定義すれば $T \odot \varphi \in \mathcal{E}(\boldsymbol{R}^n)$ である．

証明 $\varphi \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\varphi(x+y+h) - \varphi(x+y) = \int_0^1 \bigl(\nabla\varphi\bigr)(x+y+th)\cdot h dt$$

を用いれば，$h = (0, \cdots, s, 0, \cdots, 0)$ とおき，K を任意のコンパクト集合とするとき

$$\frac{\varphi(x+y+h) - \varphi(x+y)}{s} \to \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)(x+y), \quad x+y \in K \tag{5.26}$$

が一様収束の意味で成り立つ．

(1) $|y| < R_0, |x| < R$ のとき (5.26) は 一様収束するから $\operatorname{supp} T \subset \{|y| < R_0\}$ のとき

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\langle T(y), \varphi(x+y) \rangle = \left\langle T(y), \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x+y) \right\rangle$$

となり，これを繰り返して $\langle T(y), \varphi(x+y) \rangle \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ である．$|y| < R_0$, $|x| > R + R_0$ のとき $|x+y| > R$ であるから，$\operatorname{supp} T \subset \{|x| < R_0\}$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \{|x| < R\}$ なら $\langle T(y), \varphi(x+y) \rangle = 0, |x| > R + R_0$, である．

(2) $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ のとき $|x| < R$ とすれば (5.26) の左辺は y の関数として一様にあるコンパクト集合の中に台を持っていることに注意すればよい． □

定義 5.2.5 S, $T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ で S または T の台がコンパクトのとき合成積 $S * T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ を

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S, T \odot \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$$

によって定義する．

補題 5.2.4 によって右辺はうまく定義されている．

S,T がともに $L^1_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$ に属するとき，上の定義から

$$\langle S*T,\varphi\rangle=\iint_{\boldsymbol{R}^{2n}}S(x)T(y)\varphi(x+y)dxdy,\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$$

となる．$S(x)$, $T(y)$ のどちらかの台がコンパクトであるから右辺の積分は $\boldsymbol{R}^{2n}=\boldsymbol{R}^n_x\times\boldsymbol{R}^n_y$ の有界集合の上でなされている．汎関数

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^{2n})\ni\psi(x,y)\to\iint_{\boldsymbol{R}^{2n}}S(x)T(y)\psi(x,y)dxdy$$

は $\boldsymbol{R}^{2n}$ 上の超関数となる．これを $S\otimes T$ と書き，S と T のテンソル積という．$S,T\in\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ のときもテンソル積 $S\otimes T$ が定義される．これを用いれば S と T のどちらか一方の台がコンパクトのとき

$$\langle S*T,\varphi\rangle=\langle S(x)\otimes T(y),\varphi(x+y)\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$$

となる．これより

$$S*T=T*S$$

であり，また $\partial^\alpha_x\varphi(x+y)=\partial^\alpha_y\varphi(x+y)$ であることから

$$\left(\partial^\alpha_x S\right)*T=S*\left(\partial^\alpha_x T\right)$$

となることも納得できるであろう．以下ではテンソル積を使わずにこれらのことを示す．

補題 5.2.6 (1) ρ_ϵ をフリードリックスの軟化子とするとき任意の $T\in\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ に対して $T_\epsilon:=T*\rho_\epsilon\to T$ in $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$.

(2) $\varphi\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して $T_\epsilon\odot\varphi\to\varphi$ in $\mathcal{E}(\boldsymbol{R}^n)$.

(3) $T\in\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ がコンパクトな台を持つときは，$T_\epsilon\odot\varphi\to\varphi$ in $\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$.

証明 (1) 補題 A.2.2 (5) と同様にして (あるいは $\rho(x)=\rho(-x)$ となる ρ をとれば)，$\rho_\epsilon\odot\varphi\to\varphi$ in $\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ である．よって $\langle T*\rho_\epsilon,\varphi\rangle=\langle T,\rho_\epsilon\odot\varphi\rangle$ より (1) が従う．

(2), (3) は表示 $T_\epsilon\odot\varphi(x)=\langle T_\epsilon(y),\varphi(x+y)\rangle$ により明らかであろう．T_ϵ は $\operatorname{supp}T$ の ϵ-近傍に台を持っている． □

補題 5.2.7 $S,T\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ で S,T のどちらか一方はコンパクトな台を持つとする．

(1) $S*T=T*S$.

(2) $\left(\partial^\alpha_x S\right)*T=S*\left(\partial^\alpha_x T\right)$.

(3) $S,T\in\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ がともにコンパクトな台を持つとき

$$\operatorname{supp}(S*T)\subset\operatorname{supp}(S)+\operatorname{supp}(T).$$

ただし $X,Y\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して $X+Y=\{x+y;\,x\in X,\ y\in Y\}$ である．

証明 (1) S,T ともに関数のときは成り立っている．$S \in L^1_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$ で $T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ のとき，ρ_ϵ をフリードリックスの軟化子として $T_\epsilon = T*\rho_\epsilon$ とおけば，$T_\epsilon \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ であるから $S*T_\epsilon = T_\epsilon*S$ である．$\langle S*T_\epsilon, \varphi\rangle = \langle T_\epsilon*S, \varphi\rangle$ より $\langle S, T_\epsilon \odot \varphi\rangle = \langle T_\epsilon, S \odot \varphi\rangle$ となるから，補題 5.2.6 (2), (3) より $\epsilon \to 0$ として (1) が得られる．$S,T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ のときは $S*T_\epsilon = T_\epsilon * S$ において $\epsilon \to 0$ とすればよい．

補題 5.2.4 の証明の中で $\partial_x^\alpha(T \odot \varphi) = T \odot \left(\partial_x^\alpha \varphi\right) = \left(\partial_x^\alpha T\right) \odot \varphi$ が得られている．よって

$$\langle \left(\partial_x^\alpha S\right) * T, \varphi\rangle = \langle S, \left(\partial_x^\alpha T\right) \odot \varphi\rangle = \langle S * \left(\partial_x^\alpha T\right), \varphi\rangle$$

となり (2) が得られる．

(3) $X = \mathrm{supp}\,(S)$, $Y = \mathrm{supp}\,(T)$ とおく．X, Y ともにコンパクトであるから $X+Y$ もコンパクトである．$z_0 \notin X+Y$ とすればある $\epsilon > 0$ に対して $B_\epsilon(z_0) = \{x\,;\, |x-z_0| \le \epsilon\} \subset (X+Y)^c$ である．$\varphi \in B_\epsilon(z_0)$ なら，

$$\langle S*T, \varphi\rangle = \langle S(x) \otimes T(y), \varphi(x+y)\rangle = 0$$

であるから，$z_0 \notin \mathrm{supp}\,(S*T)$ である．□

補題 5.2.8 $\delta * T = T, \quad \forall T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n).$

証明 $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\left(\delta \odot \varphi\right)(x) = \langle \delta(y), \varphi(x+y)\rangle = \varphi(x)$$

であるから，$\langle \delta * T, \varphi\rangle = \langle T*\delta, \varphi\rangle = \langle T, \delta \odot \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ となりこの補題が示される．□

以上の議論で S,T ともに台がコンパクトでないときには $S*T$ は定義できない．しかし特別な場合として $T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$，$f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ のときは

$$\langle T*f, \varphi\rangle = \langle T, f \odot \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$$

によって $T*f \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ を定義できる．これは定義 4.5.13 で述べたことであった．補題 4.5.14 により

$$\mathcal{F}(T*f) = (2\pi)^{n/2}\hat{T}(\xi)\hat{f}(\xi) \tag{5.27}$$

が成り立つ．

5.2.3 合成積と基本解

定理 5.2.9 (1) $T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ が方程式 (5.20) の基本解で $f \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ の台がコンパクトなら $u = T*f \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ は方程式 (5.20) の解である．

(2) $T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ が方程式 (5.20) の基本解で $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ なら $u = T * f \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ は方程式 (5.20) の解である．

証明 補題 5.2.4 の証明中で計算したとおり $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$f \odot P(D_x)\varphi = \langle f(y), \bigl(P(D_x)\varphi\bigr)(x+y)\rangle$$
$$= P(D_x)\langle f(y), \varphi(x+y)\rangle = P(D_x)\bigl(f \odot \varphi\bigr)$$

であるから

$$\langle P(D_x)(T * f), \varphi\rangle = \langle T * f, P(D_x)\varphi\rangle = \langle T, f \odot P(D_x)\varphi\rangle$$
$$= \langle T, P(D_x)\bigl(f \odot \varphi\bigr)\rangle = \langle P(D_x)T, f \odot \varphi\rangle$$

となる．T は基本解であるから $P(D_x)T = \delta$ であり，補題 5.2.8 によってこれは

$$\langle \delta, f \odot \varphi\rangle = \langle \delta * f, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$$

となるから (1) が示された．(2) は $P(D_x)T = \delta$ より $P(\xi)\hat{T}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}$ であるから，(5.27) より従う． □

5.2.4 基本解の構成に関する注意

基本解 T は一意的ではないことに注意しよう．実際 $P(D_x)T_0 = 0$ を満たす超関数 T_0 を作れば $T + T_0$ も基本解になる．

時には $P(D_x)\bigl(T * f\bigr) = f$, $\forall f \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ を満たす $T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ が直接見つかることもある．このとき T は基本解である．実際，補題 5.2.7 (2) によって $P(D_x)(T * f) = (P(D_x)T) * f = f, \forall f \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ であるから $P(D_x) = \delta$ である．

基本解を $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ の中で作るには次のようにする．方程式 $P(D_x)T = \delta$ をフーリエ変換して $P(\xi)\hat{T} = (2\pi)^{-n/2}$ とし，$(2\pi)^{-n/2}P(\xi)^{-1}$ をフーリエ逆変換すればよい．超関数のフーリエ逆変換はフーリエ変換と同様に定義される．即ち $\varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対しては

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right)(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi$$

とし，$T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ に対しては

$$\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$$

によって定義する．

合成積について述べたのは，基本解が求められたとき $P(D_x)u = f$ の右辺の非斉次項 f をなるべく一般にとれるようにするためであった．f がコンパクト台を持つときは任意の $f \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ をとれる．そうでないときは $T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$,

$f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ の場合しか述べていない．これでは制限が強すぎるであろう．一般的に論ずるのは難しいが，問題に応じて適切な関数空間を導入しその中で許され得る非斉次項を探すのがよいであろう．5.5 節に述べるソボレフ空間はこの目的に適している．また方程式を解くという立場からは合成積にこだわる必要はなく，フーリエ変換を意味付けすることで足りるであろう．

5.3 ポアッソン方程式

ポアッソン (Poisson) **方程式**とは

$$-\Delta u = f \tag{5.28}$$

という方程式をいう．$f = 0$ の場合には**ラプラス (Laplace) 方程式**と呼ばれる．$n \geq 3$ のときは基本解は $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2)$ を計算することにより求められる．例 5.1.17 から次の定理が得られる．

定理 5.3.1 $n \geq 3$ のとき $\dfrac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}}|x|^{2-n}$ はポアッソン方程式の基本解である．$|S^{n-1}|$ を単位球面 $S^{n-1} = \{x \in \boldsymbol{R}^n\,;\,|x| = 1\}$ の表面積とすればこれは

$$\frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}|x|^{2-n}$$

と書ける．特に $n = 3$ のときは $\dfrac{-1}{4\pi|x|}$ が基本解である．

$n = 1, 2$ のときは前節の結果をそのまま使うことはできないが次のように計算すればよい．

定理 5.3.2 $n = 1$ のときは $-|x|/2$ がポアッソン方程式の基本解である．

証明 $T(x) = -|x|/2$ とおけば超関数の意味で

$$-\frac{d}{dx}T(x) = \begin{cases} 1/2 & (x > 0), \\ -1/2 & (x < 0), \end{cases}$$

$$-\left(\frac{d}{dx}\right)^2 T(x) = \delta(x)$$

となることに注意すればよい． □

定理 5.3.3 $n = 2$ のときは $-\dfrac{1}{2\pi}\log|x|$ がポアッソン方程式の基本解である．

証明 $f \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$u(x) = \int_{\boldsymbol{R}^2} T(x-y)f(y)dy = \int_{\boldsymbol{R}^2} T(y)f(x-y)dy$$

に注意すれば

$$-\Delta_x u(x) = -\int_{\boldsymbol{R}^2} T(y)\Delta_x f(x-y)dy$$

である．右辺の積分範囲を $|y|>\epsilon$ と $|y|<\epsilon$ の 2 つに分ければ後者は $\epsilon\to 0$ のとき 0 に近づく．前者は $\Delta_x f(x-y)=\Delta_y f(x-y)$ であるから，グリーンの公式 (定理 4.2.5) により

$$-\int_{|y|>\epsilon}(\Delta_y T(y))\, f(x-y)dy,$$
$$-\int_{|y|=\epsilon}\left\{T(y)\frac{\partial}{\partial\nu}f(x-y)-\left(\frac{\partial}{\partial\nu}T(y)\right)f(x-y)\right\}dS_y$$

となる．直接の計算により $y\neq 0$ のとき $\Delta_y T(y)=0$ となることが分かる．極座標 $y=r\omega$, $\omega=(\cos\theta,\sin\theta)$ に移ろう．ν は領域 $\{|y|>\epsilon\}$ に対する単位外向き法線ベクトルだから $\partial/\partial\nu=-\partial/\partial r$ である．よって $\dfrac{\partial}{\partial\nu}T(y)=\dfrac{1}{2\pi r}$ であり，$r=\epsilon$ においては $dS_y=\epsilon d\theta$ であるから上の積分は

$$-\int_0^{2\pi}\frac{r\log r}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}f(x-r\omega)d\theta\Big|_{r=\epsilon}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x-\epsilon\omega)d\theta$$

となる．$\epsilon\to 0$ として $-\Delta u(x)=f(x)$ が分かる． □

定理 5.3.1 を上のようにグリーンの公式を用いて直接証明することができる．またフーリエ変換を用いて定理 5.3.3 を証明することもできる．アダマール (Hadamard) による発散積分の有限部分の考え方が現れ，歴史的に興味深いことでもあるのだが，計算に手間がかかるのでここでは説明しなかった．参考文献 [21]，p.161 に証明がある．

5.4 ヘルムホルツ方程式

$z\in\boldsymbol{C}$ をパラメータに持つ次の方程式

$$(-\Delta-z)u=f \tag{5.29}$$

をヘルムホルツ (Helmholtz) **方程式**という．当面の間，$z\notin[0,\infty)$ としよう．この方程式の基本解を求めるには超関数の意味で

$$(2\pi)^{-n}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^2-z}d\xi$$

というフーリエ変換を計算すればよいのだが，これは次元に大きく依存する．$n=1$ の場合の結果は例 2.1.5 に与えた．

定理 5.4.1 $n=1$ のときヘルムホルツ方程式の基本解は $\dfrac{i}{2\sqrt{z}}e^{i\sqrt{z}|x|}$ である．ただし $\mathrm{Im}\sqrt{z}>0$ という枝をとる．

$n=3$ の場合に計算してみよう．$\chi_R(\xi)$ を $\{|\xi|<R\}$ の特性関数とすれば $\chi_R(\xi)(|\xi|^2-z)^{-1} \to (|\xi|^2-z)^{-1}$ in $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^3)$ $(R\to\infty)$ であることに注意して

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-3}\int_{\boldsymbol{R}^3}\chi_R(\xi)\frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^2-z}d\xi \\
&=(2\pi)^{-3}\int_0^R\frac{r^2}{r^2-z}\left(\int_{S^2}e^{ir\omega\cdot x}d\omega\right)dr
\end{aligned}\tag{5.30}$$

と極座標で書き表す．補題 5.1.14 により球対称関数のフーリエ変換は球対称であるから，上の積分は $|x|$ のみに依存する．そこで $x=(0,0,|x|)$ の場合に計算すればよい．$d\omega=\sin\theta d\theta d\varphi$ とすれば S^2 上の積分は

$$2\pi\int_0^\pi e^{ir|x|\cos\theta}\sin\theta d\theta=\frac{4\pi}{r|x|}\sin(r|x|)$$

となり，(5.30) は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi^2|x|}\int_{-R}^R\frac{t\sin(t|x|)}{t^2-z}dt&=\frac{1}{4\pi^2i|x|}\int_{-R}^R\frac{te^{it|x|}}{t^2-z}dt\\
&=\frac{1}{8\pi^2i|x|}\int_{-R}^R\left(\frac{1}{t-\sqrt{z}}+\frac{1}{t+\sqrt{z}}\right)e^{it|x|}dt
\end{aligned}$$

と書き換えられる．ここで $z<0$ と仮定し，$\sqrt{z}=i|z|^{1/2}$ という分枝をとる．例 2.1.3 により $a>0$ のとき

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{ixk}}{x-ia}dx=\begin{cases}2\pi i\,e^{-ak} & (k>0),\\ 0 & (k<0),\end{cases}\tag{5.31}$$

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{ixk}}{x+ia}dx=\begin{cases}-2\pi i\,e^{ak} & (k<0),\\ 0 & (k>0)\end{cases}\tag{5.32}$$

であることを使えば

$$(2\pi)^{-3}\int_{\boldsymbol{R}^3}\frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^2-z}d\xi=\frac{e^{-|z|^{1/2}|x|}}{4\pi|x|}$$

という式が得られた．ここで $|z|^{1/2}$ を $-i\sqrt{z}$ で置き換え，両辺が $z\in\boldsymbol{C}\setminus[0,\infty)$ で正則であることを使うと次の定理が得られる．

定理 5.4.2 $n=3$ で $z\notin[0,\infty)$ のときヘルムホルツ方程式の基本解は $\dfrac{1}{4\pi|x|}e^{i\sqrt{z}|x|}$ で与えられる．ただし $\mathrm{Im}\sqrt{z}>0$ という分枝をとる．

$n=1,3$ 以外のときはこのようにして計算するのは難しい．そこで次のように考えよう．前節では基本解は一意的でないと述べたが，この場合には次の補題が成り立つ．

補題 5.4.3 $z\notin[0,\infty)$ のとき $T\in\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ である (5.29) の基本解 T は一意的である．

証明　緩増加超関数である 2 つの基本解の差を U とすれば超関数の意味で $(-\Delta - z)U = 0$ であるから，フーリエ変換して $(|\xi|^2 - z)\hat{U} = 0$ である．$\varphi(\xi) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して $\psi(\xi) = (|\xi|^2 - z)^{-1}\varphi(\xi)$ とおけば $\psi(\xi) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ である．実際 $z \notin [0, \infty)$ より

$$|\partial_\xi^\alpha (|\xi|^2 - z)^{-1}| \le C_\alpha (1 + |\xi|)^{-2-|\alpha|}, \quad \forall \alpha$$

(C_α は z には依存するが ξ にはよらない定数) となることが示されるからである．$(|\xi|^2 - z)\hat{U} = 0$ より

$$0 = \langle (|\xi|^2 - z)\hat{U}, \psi \rangle = \langle \hat{U}, \varphi \rangle = \langle U, \varphi \rangle$$

であり，$\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ は任意にとれるから $\hat{U} = 0$ である．□

$(|\xi|^2 - z)^{-1}$ は球対称であるからそのフーリエ変換 $K(x)$ も球対称である．また補題 5.1.12 の証明中の計算から分かるように $K(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ である．$K(x) = g(|x|)$ とおくと，$(-\Delta - z)g(|x|) = \delta(x)$ であるから原点以外では $(-\Delta - z)g(|x|) = 0$ となるはずである．$\hat{x} = x/|x|$, $\hat{x}_j = x_j/|x|$ とおくと $\partial_{x_j}|x| = \hat{x}_j$ であるから，

$$\left(-\partial_r^2 - \frac{n-1}{r}\partial_r - z\right) g(r) = 0, \quad r > 0$$

が成り立つ．$g(r) = r^\alpha h(r)$ とおくと $h(r)$ は

$$h'' + \frac{2\alpha + n - 1}{r}h' + \left(\frac{\alpha(\alpha + n - 2)}{r^2} + z\right) h = 0$$

を満たす．$\alpha = (2-n)/2$ ととればこれは

$$h'' + \frac{1}{r}h' + \left(z - \frac{(n-2)^2}{4r^2}\right) h = 0$$

となる．そこで $w(t) = h(t/\sqrt{z})$ とおけば $w(t)$ は

$$w'' + \frac{1}{t}w' + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) w = 0, \quad \nu = \frac{n-2}{2} \tag{5.33}$$

を満たす．これは ν 次のベッセル (Bessel) の微分方程式である．この方程式の 1 次独立な解として第 1 種，第 2 種のハンケル (Hankel) 関数 $H_\nu^{(1)}(t)$, $H_\nu^{(2)}(t)$ というものが知られている．これはどちらも $t \in \boldsymbol{C} \setminus [0, \infty)$ で正則であり，$|t| \to \infty$, $0 < \arg t < \pi$ において

$$H_\nu^{(1)}(t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{i(t - (2\nu+1)\pi/4)}, \tag{5.34}$$

$$H_\nu^{(2)}(t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-i(t - (2\nu+1)\pi/4)} \tag{5.35}$$

という漸近展開を持つことが知られている (参考文献 [3], p.154)．　特に

$H_\nu^{(1)}(t) \to 0$, $H_\nu^{(2)}(t) \to \infty$ である．我々は $K(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2 - z)^{-1})$ を求めようとしているのであるが，補題 5.1.12 により $K(x)$ は $|x| \to \infty$ で急減少し，$|x| < 1$ で $|K(x)| \le C|x|^{-n+\sigma}$ $(0 < \sigma < 2)$ という評価を持つはずである．よって $w(t)$ は $H^{(1)}(t)$ の定数倍である．従って

$$g(r) = Cr^{-(n-2)/2} H_\nu^{(1)}(\sqrt{z}r)$$

となる．$u(x) = \displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n} g(|x-y|)f(y)dy$ とおいて，これが (5.29) を満たすように定数 C を定めよう．そのために $H_\nu^{(1)}(t)$ の $t \to 0$ での展開を求めておく．

ν 次のベッセル関数 $J_\nu(t)$, ノイマン関数 $N_\nu(t)$ によって $H_\nu^{(1)}(t) = J_\nu(t) + iN_\nu(t)$ と書ける．参考文献 [3], p.145 に与えられたそれらの巾級数展開を使うと $z \to 0$ のとき

$$H_{(n-2)/2}^{(1)}(t) = \begin{cases} \pi^{-1/2}\left(\dfrac{t}{2}\right)^{-1/2}\bigl(1 + O(t)\bigr), & n = 1, \\ 2i\pi^{-1}\log\left(\dfrac{t}{2}\right)\bigl(1 + O(t)\bigr), & n = 2, \\ -i\pi^{-1}\Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)\left(\dfrac{t}{2}\right)^{-(n-2)/2}\bigl(1 + O(t)\bigr), & n \ge 3 \end{cases} \tag{5.36}$$

という展開が得られる．ただしここで関数等式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin(\pi s)$ を用いた．この展開は巾級数によるものであるから項別に微分できる．即ち (5.36) で $O(t)$ と書いた部分は $(d/dt)^n O(t) = O(t^{n+1})$ $(t \to 0)$ という性質を持つ．

$n \ge 3$ の場合をまず考えよう．$f \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ とし

$$u(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} g(|y|)f(x-y)dy$$

として

$$(-\Delta_x - z)u(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} g(|y|)(-\Delta_x - z)f(x-y)dy$$

とする．右辺の積分範囲を $|y| > \epsilon$ と $|y| < \epsilon$ の 2 つに分ける．$g(r) = O(r^{-(n-2)/2})$ $(r \to 0)$ であるから後者の積分は $\epsilon \to 0$ のとき 0 に近づく．$\Delta_y f(x-y) = \Delta_x f(x-y)$ であるから，前者の積分はグリーンの公式により

$$\int_{|y|=\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}g(|y|)\right)f(x-y)dS_y - \int_{|y|=\epsilon} g(|y|)\frac{\partial}{\partial\nu}f(x-y)dS_y$$

となる．ただしここで $y \ne 0$ のとき $(-\Delta_y - z)g(|y|) = 0$ となることを用いた．単位球の面積要素を $d\omega$ とすれば $dS_y = \epsilon^{n-1}d\omega$ である．よって右辺第 2

項は 0 に近づく．右辺第 1 項は $\partial/\partial\nu = -\partial/\partial r$ であることより

$$\frac{\partial g}{\partial \nu} \sim \frac{C(2-n)i\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\pi}\left(\frac{\sqrt{z}}{2}\right)^{-(n-2)/2} r^{1-n}$$

であるから

$$\frac{C(2-n)i\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\pi}\left(\frac{\sqrt{z}}{2}\right)^{-(n-2)/2} |S^{n-1}|f(x)$$

に近づく．この係数が 1 になるように C を定めれば

$$C = \frac{i}{4\pi^{(n-2)/2}}\left(\frac{\sqrt{z}}{2}\right)^{(n-2)/2}$$

となる．$n=2$ の場合も同様にして $C = i/4$ となる．以上により次の定理が示された．

定理 5.4.4 $z \notin [0,\infty)$ のときヘルムホルツ方程式の基本解は

$$\frac{i}{4}\left(\frac{\sqrt{z}}{2\pi|x-y|}\right)^{(n-2)/2} H^{(1)}_{(n-2)/2}(\sqrt{z}|x-y|)$$

という積分核を持つ．ここで $\mathrm{Im}\sqrt{z} > 0$ であり，$H^{(1)}_\nu$ は第 1 種ハンケル関数である．

5.5 ソボレフ空間

ソボレフ空間はソボレフ (Sobolev) によって 1930 年代の末に導入されていたものであるが，偏微分方程式を考える上で不可欠の道具となっている．これを超関数の立場から見直そう．

定義 5.5.1 Ω を $\boldsymbol{R}^n$ の領域とする．$u_\alpha \in L^2(\Omega)$ が $u \in L^2(\Omega)$ の α 次弱導関数であるとは

$$(u_\alpha, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(u, \partial_x^\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

が成り立つことである．ここで (,) は $L^2(\Omega)$ の内積である．

これは $u \in L^2(\Omega)$ の超関数の意味の微分 $\partial_x^\alpha u$ が $L^2(\Omega)$ に属すること，と言い換えてもよい．以後 u_α を $\partial_x^\alpha u$ と書く．

定義 5.5.2 Ω を $\boldsymbol{R}^n$ の領域，m を 0 以上の整数とする．$|\alpha| \le m$ となるすべての α に対する弱導関数 $\partial_x u$ が $L^2(\Omega)$ に属する $u \in L^2(\Omega)$ の全体を $H^m(\Omega)$ と書き，m 次のソボレフ空間という．

$H^m(\Omega) \ni u, v$ に対して

$$(u,v)_m = \sum_{|\alpha|\le m} (\partial_x^\alpha u, \partial_x^\alpha v),$$

$$\|u\|_m = \sqrt{(u,u)_m} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|\partial_x^\alpha u\|^2 \right)^{1/2}$$

とおく．

定理 5.5.3 $H^m(\Omega)$ はヒルベルト空間である．

証明 完備性を示す．$\{u^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ を $H^m(\Omega)$ のコーシー列とする．

$$\|\partial_x^\alpha u^{(i)} - \partial_x^\alpha u^{(j)}\|^2 \le \|u^{(i)} - u^{(j)}\|_m^2, \quad |\alpha| \le m$$

であるから $L^2(\Omega)$ の完備性より $\|u^{(i)} - u\| \to 0$, $\|\partial_x^\alpha u^{(i)} - v_\alpha\| \to 0$ となる $u, v_\alpha \in L^2(\Omega)$ が存在する．$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して $(\partial_x^\alpha u^{(i)}, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(u^{(i)}, \partial_x^\alpha \varphi)$ であるから，$i \to \infty$ とすることにより，$\partial_x^\alpha u = v_\alpha$ が分かる．よって $u \in H^m(\Omega)$ であり，$\sum_{|\alpha|\le m} \|\partial_x u^{(i)} - \partial_x^\alpha u\|^2 \to 0$ であるから $H^m(\Omega)$ は完備である． □

$\Omega = \boldsymbol{R}^n$ のときは $H^m(\Omega)$ の定義をフーリエ変換によって書き換えることができる．

補題 5.5.4 $u \in H^m(\boldsymbol{R}^n)$ となるための必要十分条件は $(1+|\xi|)^m \hat{u}(\xi) \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ となることである．このとき定数 $C > 0$ が存在し

$$C^{-1}\|u\|_m \le \|(1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{u}(\xi)\| \le C\|u\|_m \tag{5.37}$$

が成り立つ．また $u, v \in H^m(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$(u,v)_m = \sum_{|\alpha|\le m} (\xi^\alpha \hat{u}(\xi), \xi^\alpha \hat{v}(\xi)) \tag{5.38}$$

となる．

証明 $(u, \partial_x^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(v_\alpha, \varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ は

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} ((-i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) - \hat{v}_\alpha(\xi))\, \hat{\varphi}(\xi) d\xi = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$$

と同値である．これより $u \in H^m(\boldsymbol{R}^n)$ は $\xi^\alpha \hat{u}(\xi) \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, $|\alpha| \le m$ と同値であり，さらに $\mathcal{F}\partial_x^\alpha u = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$ となる．容易に分かる不等式

$$C^{-1} \sum_{0\le k\le m} r^k \le (1+r)^m \le C \sum_{0\le k\le m} r^k, \quad r > 0$$

において $r = |\xi|^2$ として $|\hat{u}(\xi)|^2$ をかけて積分すれば (5.37) が得られる．

$H^m(\boldsymbol{R}^n)$ のノルムにおいてフーリエ変換すれば (5.38) が得られる． □

上のことから m が整数でなくてもソボレフ空間を定義できることが分かる．

定義 5.5.5 $s \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $H^s(\boldsymbol{R}^n)$ とは $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ を満たす $u \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ の全体である．$u, v \in H^s(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\|u\|_s = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}$$

とおく．

例 5.5.6 $s < -n/2$ のとき $\delta \in H^s(\boldsymbol{R}^n)$.

また定義 5.5.5 から，$\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ は $H^s(\boldsymbol{R}^n)$ の中で稠密であることが分かる．

s が 0 以上の整数のときは $\|\cdot\|_s$ は前に定義したノルム $\|\cdot\|_m$ とは異なるが，補題 5.5.4 にみるとおりそれらは同値なノルムであるから応用上は問題はない．ただしあるベクトル空間 X に与えられた 2 つのノルム $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ が同値とは，定数 $C > 0$ が存在し

$$C^{-1}\|u\|_1 \le \|u\|_2 \le C\|u\|_1, \quad \forall u \in X$$

が成り立つことである．s が整数でないときは $H^s(\boldsymbol{R}^n)$ の元はいわば分数回微分可能である．

補題 5.5.7 $m \ge 0$ を整数，$0 < \gamma < 1$ のとき $\|u\|_{m+\gamma}$ は次のノルムと同値である．

$$\left(\|u\|'_{m+\gamma}\right)^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n} \frac{|\partial_x^\alpha u(x) - \partial_y^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\gamma}} dxdy + \int_{\boldsymbol{R}^n} |u(x)|^2 dx.$$

証明 $u \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$u(x+y) - u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\cdot\xi}(e^{iy\cdot\xi} - 1)\hat{u}(\xi) d\xi$$

であるから x の関数とみてパーセバルの等式を用いることにより

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} |u(x+y) - u(x)|^2 dx = \int_{\boldsymbol{R}^n} |e^{iy\cdot\xi} - 1|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

となる．$u(x)$ を $\partial_x^\alpha u(x)$ で置き換えれば

$$\left(\|u\|'_{m+\gamma}\right)^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n} \frac{|e^{iy\cdot\xi} - 1|^2 |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|^2}{|y|^{n+2\gamma}} d\xi dy + \int_{\boldsymbol{R}^n} |u(x)|^2 dx$$

である．$R^{-1}\xi = (|\xi|, 0, \cdots, 0)$ となる直交変換 R をとり $y = Rz$ とすれば，$y \cdot \xi = |\xi| z_1$ であるから

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{|e^{iy\dot{\xi}} - 1|^2}{|y|^{n+2\gamma}} dy = \int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{|e^{iz_1|\xi|} - 1|^2}{|z|^{n+2\gamma}} dz$$

$$= |\xi|^{2\gamma} \int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{|e^{iz_1} - 1|^2}{|z|^{n+2\gamma}} dz = C_\gamma |\xi|^{2\gamma}$$

となる．ただしここで $|z| < 1$ のとき $|e^{iz_1} - 1| \le C|z|$ となることを用いた．よって $\left(\|u\|'_{m+\gamma}\right)^2$ は

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2\gamma} \sum_{|\alpha|=m} |\xi^\alpha|^2\right) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

と同値であり，これは $\|(1+|\xi|)^{m+\gamma}\hat{u}(\xi)\|^2_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}$ と同値である．□

$u \in C^m(\boldsymbol{R}^n)$ で $\partial_x^\alpha u \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, $|\alpha| \le m$ なら $u \in H^m(\boldsymbol{R}^n)$ である．ソボレフの補題と呼ばれる次の事実はこのことの逆が多少の制限の下で意味で成り立つことを意味し，応用上極めて重要である．

補題 5.5.8 (Sobolev)　ある自然数 k に対して $s > k + \dfrac{n}{2}$ のとき

$$H^s(\boldsymbol{R}^n) \subset C^k(\boldsymbol{R}^n). \tag{5.39}$$

より正確には，$u \in H^s(\boldsymbol{R}^n)$ に属する関数は，必要ならば測度 0 の集合の上でその値を修正することにより，$u \in C^k(\boldsymbol{R}^n)$ となり，さらに定数 $C_s > 0$ が存在して

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}^n} \sum_{|\alpha| \le k} |\partial_x^\alpha u(x)| \le C_s \|u\|_s, \quad \forall u \in H^s(\boldsymbol{R}^n) \tag{5.40}$$

が成り立つ．

証明　$u \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\partial_x^\alpha u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\cdot\xi} (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) d\xi$$

であるから

$$|\partial_x^\alpha \hat{u}(\xi)| \le (2\pi)^{-n/2} \int_{\boldsymbol{R}^n} (1+|\xi|)^{-s} |\xi^\alpha| (1+|\xi|)^s |\hat{u}(\xi)| d\xi$$

と評価される．$|\alpha| \le k$ のとき $s - |\alpha| > n/2$ であるから $(1+|\xi|)^{-s}|\xi^\alpha| \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ である．よってシュワルツの不等式により (5.40) が $u \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して成り立つ．任意の $u \in H^s(\boldsymbol{R}^n)$ を $\varphi_j \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ で近似する．(5.40) により $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ は k 階までの導関数までこめて一様収束する．一方 φ_j は u に L^2 の意味で収束するから，測度 0 の集合上での値を修正することにより $u \in C^k(\boldsymbol{R}^n)$ となる．(5.40) は φ_j に対して成立するから，u に対しても成立する．□

補題 5.5.8 は $\boldsymbol{R}^n$ の中の有界領域においても成り立つ．また微分可能関数の空間の代わりに適当な L^p 空間をとっても成り立つ．これらは偏微分方程式を考える上で必要不可欠な道具となっている．

5.6 楕円型方程式の解の正則性

定数係数の多項式

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \xi^\alpha, \quad a_\alpha \in \boldsymbol{C}, \quad \xi \in \boldsymbol{R}^n$$

に対して

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$$

を $P(\xi)$ の**主要部**という．また微分作用素 $P(D_x)$ に対して $P_m(D_x)$ をその主要部という．

定義 5.6.1　微分作用素 $P(D_x)$ はその主要部がある定数 $C > 0$ に対して

$$|P_m(\xi)| \ge C|\xi|^m, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n$$

を満たすとき m 階の**楕円型** (elliptic) と呼ばれる．

上の条件は，定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在し

$$|P(\xi)| \ge C_1|\xi|^m, \quad |\xi| > C_2 \tag{5.41}$$

となることと同値であることに注意しよう．

任意の定数係数楕円型微分作用素に対して基本解が存在する．

定理 5.6.2　$P(D_x)$ が楕円型のとき

$$P(D_x)E = \delta$$

を満たす $E \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ が存在する．

この定理の証明は省略しよう．例えば 参考文献 [5], p.129 に証明がある．実は任意の定数係数線形微分作用素に対してその基本解が存在することが知られている．この定理により $P(D_x)$ が楕円型のとき微分方程式

$$P(D_x)u = f \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n) \tag{5.42}$$

は f の台がコンパクトのとき解 $u = E * f \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ を持つ．一般に解は一意ではない．この節で論じたいのは次の定理である．

定理 5.6.3　$P(D_x)$ を定数係数 m 階楕円型微分作用素とし，$t, s \in \boldsymbol{R}$ とする．$u \in H^t(\boldsymbol{R}^n)$，$f \in H^s(\boldsymbol{R}^n)$ が $P(D_x)u = f$ を満たせば $u \in H^{s+m}(\boldsymbol{R}^n)$ である．

証明 記号を 1 つ導入する．$r \in \boldsymbol{R}$ に対し

$$\mathcal{F}^{-1}h \in H^r(\boldsymbol{R}^n) \Longleftrightarrow h \in \hat{H}^r(\boldsymbol{R}^n)$$

とする．定理の証明は $t < s + m$ の場合に行えばよい．方程式をフーリエ変換すれば $P(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$ である．$\chi_\infty(\xi) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ で $\chi_\infty(\xi) = 1$ $(|\xi| > 2)$, $\chi_\infty(\xi) = 0$ $(|\xi| < 1)$ となるものをとり

$$R(\xi) = P_m(\xi)^{-1}\chi_\infty(\xi),$$
$$Q(\xi) = -P_m(\xi)^{-1}\chi_\infty(\xi)\,(P(\xi) - P_m(\xi))$$

とおく．C_α を定数として

$$\left|\partial_\xi^\alpha R(\xi)\right| \le C_\alpha(1+|\xi|)^{-m-|\alpha|}, \quad \forall\alpha, \tag{5.43}$$

$$\left|\partial_\xi^\alpha Q(\xi)\right| \le C_\alpha(1+|\xi|)^{-1-|\alpha|}, \quad \forall\alpha \tag{5.44}$$

が成り立つ．$P(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$ より

$$\chi_\infty(\xi)\hat{u}(\xi) = R(\xi)\hat{f}(\xi) + Q(\xi)\hat{u}(\xi) \tag{5.45}$$

である．$f \in H^s(\boldsymbol{R}^n)$ であるから (5.43) より $R(\xi)\hat{f}(\xi) \in \hat{H}^{s+m}(\boldsymbol{R}^n)$ である．また $\hat{u}(\xi) \in H^t(\boldsymbol{R}^n)$ であるから (5.44) より $Q(\xi)\hat{u}(\xi) \in \hat{H}^{t+1}(\boldsymbol{R}^n)$ である．$t_1 = \min\{s+m, t+1\}$ とおけば $\chi_\infty(\xi)\hat{u}(\xi) \in \hat{H}^{t_1}(\boldsymbol{R}^n)$ である．また $(1-\chi_\infty(\xi))\hat{u}(\xi) \in H^\alpha(\boldsymbol{R}^n), \forall\alpha$ である．従って (5.45) より $u \in H^{t_1}(\boldsymbol{R}^n)$ である．同じ議論によって $t_2 = \min\{s+m, t_1+1\}$ とすれば $u \in H^{t_2}(\boldsymbol{R}^n)$ である．以下同様に繰り返して $u \in H^{s+m}(\boldsymbol{R}^n)$ となる．□

上のような議論を編上げ靴論法 (boot-strap argument) といい，偏微分方程式論ではよく用いられる．特に次の系が得られる．

系 5.6.4 定理 5.6.3 の仮定の下で $f \in H^s(\boldsymbol{R}^n)$, $\forall s$ なら $u \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ である．

証明 定理 5.6.3 により $u \in H^s(\boldsymbol{R}^n)$, $\forall s$ であるからソボレフの補題（補題 5.5.8) を用いればよい．□

上の $R(\xi)$ は基本解ではないが基本解を近似するもので**パラメトリックス** (parametrix) と呼ばれる．

定理 5.6.3, 系 5.6.4 は適当な仮定の下で変数係数の楕円型微分方程式

$$\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D_x^\alpha u = f$$

に対しても成立する．即ち非斉次項が無限回微分可能なら解も無限回微分可能になる．これを示すにはパラメトリックスをフーリエ変換を用いて構成するの

が一法である．

ここで述べたことは偏微分方程式論における典型的な論法である．一般に微分方程式においては解を具体的に書き下せることは殆どない．そこで他の手段によって解の存在をまず保証する．多くの場合，関数解析学の知識を援用する．得られた解は古典的な意味の解であるかどうかは一般には分からないが超関数の意味の解にはなっている．そこで上に述べたようにして解の属するソボレフ空間を決定し，ソボレフの補題によって解の微分可能性を考える．これが通常行われる方法である．古典的な意味で解になることが分からない段階でも微分方程式を取り扱えるという意味で，超関数は偏微分方程式論において必須の考え方であることが分かるであろう．

5.7 コーシー・リーマン作用素の基本解

$\boldsymbol{R}^2$ の変数を (x,y) と書こう．コーシー・リーマン (Cauchy-Riemann) の作用素とは

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{5.46}$$

で定義される微分作用素である．$\overline{\partial}$ の基本解は関数論でよく知られているのだが，これを超関数の立場から見直そう．

$$E(x,y) = \frac{1}{\pi(x+iy)} \tag{5.47}$$

とおく．

補題 5.7.1 $\overline{\partial}\, E(x,y) = \delta$.

証明 $f(x,y) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ に対して

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{\boldsymbol{R}^2} \frac{f(x',y')}{x-x'+i(y-y')}dx'dy' \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\boldsymbol{R}^2} \frac{f(x-x',y-y')}{x'+iy'}dx'dy' \end{aligned}$$

とおく．$r = \sqrt{(x')^2+(y')^2}$ とおく．$\epsilon > 0$ を小さくとり

$$u_\epsilon(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{r>\epsilon} \frac{f(x-x',y-y')}{x'+iy'}dx'dy'$$

とおけば

$$\overline{\partial}\, u_\epsilon(x,y) = \frac{-1}{2\pi}\int_{r>\epsilon} \frac{1}{x'+iy'}\left(\frac{\partial}{\partial x'} + i\frac{\partial}{\partial y'}\right) f(x-x',y-y')dx'dy'$$

である．部分積分によって

$$\overline{\partial}\, u_\epsilon(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{r=\epsilon} \frac{1}{x'+iy'}\left(\frac{x'}{r} + i\frac{y'}{r}\right) f(x-x',y-y')dl$$

となる．ここで $dl = rd\theta$，ただし $x' = r\cos\theta$, $y' = r\sin\theta$ とおいた．よって

$$\overline{\partial}\, u_\epsilon(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{r=\epsilon} f(x-\epsilon\cos\theta, y-\epsilon\sin\theta)d\theta$$

であるから超関数の意味で

$$\overline{\partial}\, u(x,y) = f(x,y)$$

である．$\overline{\partial}$ は楕円型であるから定理 5.6.3 によって $u(x,y) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ であり，上の方程式は $\boldsymbol{R}^2$ 全体で成り立つ． □

補題 5.7.1 の内容を複素変数 $z = x + iy$ で表そう．$u(z) = u(x,y)$ とし

$$dzd\overline{z} = -2idxdy$$

とおく．次の公式は**一般化されたコーシーの積分公式**と呼ばれている．

定理 5.7.2 D を複素平面の有界領域とし C をその境界とすれば任意の $u(z) \in C^\infty(\boldsymbol{C})$ と $z \in D$ に対し

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\overline{\partial}u(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta d\overline{\zeta}$$

証明 D から z を中心とする半径 ϵ の円板を除いた領域を D_ϵ とする．$\zeta = x' + iy'$, $r = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ とおけば定理 4.2.4 によって

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{D_\epsilon} \frac{\overline{\partial}u(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta d\overline{\zeta} &= \frac{-1}{2\pi}\int_{D_\epsilon} \frac{1}{\zeta - z}\left(\frac{\partial}{\partial x'} + i\frac{\partial}{\partial y'}\right)u(\zeta)dx'dy' \\ &= \frac{-1}{2\pi}\int_C \frac{1}{\zeta - z}(n_{x'} + in_{y'})\,u(\zeta)dl \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{r=\epsilon} \frac{1}{\zeta - z}\left(\frac{x'}{r} + i\frac{y'}{r}\right)u(\zeta)dl\end{aligned}$$

となる．ここで $(n_{x'}, n_{y'})$ は D の外向き単位法線ベクトルである．

$$dx' + idy' = i(n_{x'} + in_{y'})dl$$

となることに注意しよう．これは C を $a(t) + ib(t)$ とパラメータ表示すれば，

$$n_{x'} + in_{y'} = -i\left(\frac{da(t)}{dt} + i\frac{db(t)}{dt}\right)c(t)^{-1},$$

$$c(t) = \sqrt{\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db(t)}{dt}\right)^2}$$

であることから従う．よって $\epsilon \to 0$ として定理が示される． □

第 6 章
定常位相の方法

この章の目的はパラメータ λ を含んだ積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x)}a(x)dx$ の $\lambda \to \infty$ での漸近展開を求めることである．このような積分はよく現れるので，ここで述べる方法は身につけておくのがよい．

6.1 ガウス型関数のフーリエ変換

$M_n(\boldsymbol{R})$ は成分が実数の $n \times n$ 行列全体を表す．また $GL_n(\boldsymbol{R}) = \{A \in M_n(\boldsymbol{R})\,;\,\det A \neq 0\}$ である．ベクトル v を成分で $(v_1, \cdots, v_n)$ と表示するときには列ベクトル (縦ベクトル) を意味するものとする．$\boldsymbol{R}^n$ の内積を

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i, \quad \xi,\ \eta \in \boldsymbol{R}^n$$

によって定義する．$|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$ である．対称行列 $A = (a_{ij}) \in M_n(\boldsymbol{R})$ が正定値であるとは，ある定数 $C > 0$ が存在し

$$\langle A\xi, \xi \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \geq C|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n$$

が成り立つことである．これは A の固有値 λ_i $(i = 1, \cdots, n)$ がすべて正であることと同値である．実際，λ_i に対する固有ベクトル v_i を $v_1, \cdots, v_n$ が正規直交系になるようにとり，$v_i = (v_{1i}, v_{2i}, \cdots, v_{ni})$ として行列 $V = (v_{ij})$ を考えれば V は直交行列であり，${}^tVAV$ は対角成分が $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ である対角行列となる．そこで $\eta = V^{-1}\xi$ とおくと

$$\langle A\xi, \xi \rangle = \langle {}^tVAV\eta, \eta \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i^2 \geq C|\eta|^2$$

となる．$\eta = (1, 0, \cdots, 0)$ などととれば $\lambda_i > 0$ が分かる．

さて補題 1.1.1 により $t > 0$ のとき

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}e^{-tx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\xi^2/(4t)} \tag{6.1}$$

が成り立つことに注意しよう．両辺ともに $\mathrm{Re}\, t > 0$ において解析的であるから (6.1) は $\mathrm{Re}\, t > 0$ に対しても成り立つ．ここで $z = re^{i\theta} \in \boldsymbol{C}$, $-\pi < \theta < \pi$ に対して $\sqrt{z} = r^{1/2}e^{i\theta/2}$ とする．$0 \neq \lambda \in \boldsymbol{R}$ のとき $\mathrm{sgn}\,\lambda = 1$ $(\lambda > 0)$, $\mathrm{sgn}\,\lambda = -1$ $(\lambda < 0)$ とおく．$\epsilon > 0$, $\epsilon \to 0$ のとき

$$\sqrt{\epsilon + i\lambda} \to |\lambda|^{1/2}e^{(\mathrm{sgn}\lambda)\pi i/4} \tag{6.2}$$

である．

定義 6.1.1 $A \in GL_n(\boldsymbol{R})$ が対称で，n_+, n_- をそれぞれ A の正，負の固有値の個数とするとき $\mathrm{sgn}\, A = n_+ - n_-$ を A の符号という．

以上の準備の下に次の定理を示す．

定理 6.1.2 $A \in GL_n(\boldsymbol{R})$ が対称のとき

$$\mathcal{F}\left(e^{i\langle Ax,x\rangle/2}\right) = e^{(\mathrm{sgn}\, A)\pi i/4}|\det A|^{-1/2}e^{-i\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle/2}.$$

証明 A を直交行列 V で対角化し $x = Vy, \xi = V\eta$ とおけば (6.1) により

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-ix\cdot\xi-\epsilon|x|^2+i\langle Ax,x\rangle/2}dx \\
&= \prod_{j=1}^{n}\left((2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy_j\eta_j}e^{-\epsilon y_j^2+i\lambda_j y_j^2/2}dy_j\right) \\
&= \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\epsilon - i\lambda_j}}e^{-\eta_j^2/(4\epsilon-2i\lambda_j)}\right) \\
&\to \frac{e^{(\mathrm{sgn}\, A)\pi i/4}}{\prod_{j=1}^{n}|\lambda_j|^{1/2}}e^{-i\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2/(2\lambda_j)}
\end{aligned}$$

である．ここで $\prod_{j=1}^{n}|\lambda_j|^{1/2} = |\det A|^{1/2}$ であり，$B = {}^tVAV$ とおけば

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\eta_j^2}{\lambda_j} = \langle B^{-1}\eta,\eta\rangle = \langle A^{-1}\xi,\xi\rangle$$

であるから定理が示された． □

補題 6.1.3 $A \in GL_n(\boldsymbol{R})$ が対称行列であるとき 任意の $N \geq 0$, $s > n/2$ と $u \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i\lambda\langle Ay,y\rangle/2}u(y)dy - \lambda^{-n/2}\sum_{j=0}^{N}\lambda^{-j}\left(L_ju\right)(0)\right| \\
&\leq C_{N,s}\lambda^{-N-n/2}\|u\|_{H^{2N+s}(\boldsymbol{R}^n)}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで L_j は $2j$ 階の微分作用素で

$$L_0 = (2\pi)^{n/2} e^{(\mathrm{sgn}\, A)\pi i/4} |\det A|^{-1/2}$$

である．

証明 $v(\xi) = \big(\mathcal{F}^{-1}u\big)(\xi)$, $A_\lambda = \lambda A$, $B_\lambda = -(2\lambda)^{-1}A^{-1}$ とおくと定理 6.1.2 により

$$\int e^{i\lambda\langle Ay,y\rangle/2} u(y)dy = \langle \mathcal{F}\big(e^{i\langle A_\lambda y,y\rangle/2}\big), v(\xi)\rangle$$
$$= e^{(\mathrm{sgn}\, A_\lambda)\pi i/4} |\det A_\lambda|^{-1/2} \int e^{i\langle B_\lambda \xi,\xi\rangle} v(\xi)d\xi$$

である．$g(t) = e^{tz}$ とおけばテイラー展開により

$$g(t) = \sum_{j<N} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} t^j + \int_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} g^{(N)}(s)ds$$

であるから $\mathrm{Re}\, z \le 0$ のとき

$$\left| e^z - \sum_{j<N} \frac{z^j}{j!} \right| \le \frac{|z|^N}{N!}$$

である．これより

$$\int e^{i\langle B_\lambda \xi,\xi\rangle} v(\xi)d\xi$$
$$= \sum_{j<N} \int \frac{(i\langle B_\lambda \xi,\xi\rangle)^j}{j!} v(\xi)d\xi + \int O\Big(\Big(\frac{|\xi|^2}{\lambda}\Big)^N\Big) v(\xi)d\xi$$

となる．ここで

$$\int \frac{(i\langle B_\lambda \xi,\xi\rangle)^j}{j!} v(\xi)d\xi = \int e^{-iy\cdot\xi} \frac{(i\langle B_\lambda \xi,\xi\rangle)^j}{j!} v(\xi)d\xi \Big|_{y=0}$$

と考えれば，これは $(M_j u)(0)$, ただし M_j はある $2j$ 階の微分作用素という形に書ける．特に $M_0 = (2\pi)^{n/2}$ である．さらに $s > n/2$ のとき

$$\left| \int O\Big(\Big(\frac{|\xi|^2}{\lambda}\Big)^N\Big) v(\xi)d\xi \right| \le C\lambda^{-N} \|u\|_{H^{2N+s}(\boldsymbol{R}^n)}$$

である．以上を合わせて補題が示された．□

6.2 モースの補題

まず逆関数に関する定理を復習しておこう．線形写像の場合には次のような定理が成り立つ．

定理 6.2.1 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^k$ を線形写像とする．

(1) f が onto (i.e. $\mathrm{rank}\, f = k$) なら，線形写像 $g : \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}^n$ で $\boldsymbol{R}^k$ 上 $f \circ g = 1$ となるものが存在する．

(2) f が 1 対 1 (i.e. $\mathrm{rank}\, f = n$) なら，線形写像 $g : \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}^n$ で $\boldsymbol{R}^n$ 上 $g \circ f = 1$ となるものが存在する．

証明　これはよく知られたことなのだが次の定理の準備となるものなので説明しよう．f を表示する行列を A とする．行列の初等変形によって，実 $k \times n$ 行列 A の rank が r であれば，ある $U \in GL_k(\boldsymbol{R})$，$U' \in GL_n(\boldsymbol{R})$ が存在し

$$UAU' = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

となる．ただし I_r は $r \times r$ 単位行列である．

(1) の場合，$r = k$ であるから 2 段目の行の 0　0 はない．(6.3) に左から U^{-1}, 右から $\begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}$ をかければ

$$AV = (I_r\ 0), \quad V = U' \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．そこで $\boldsymbol{R}^k \ni (x_1, \cdots, x_k)$ に $(x_1, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0) \in \boldsymbol{R}^n$ を対応させ，さらに V をかける写像を g とすればよい．(2) も同様である．□

一般に $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^k$ への C^∞ 写像 $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_k(x))$ に対してそのヤコビ行列を

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)$$

によって定義する．これは実 $k \times n$ 行列に値をとる $\boldsymbol{R}^n$ 上の関数である．

定理 6.2.2　X を $\boldsymbol{R}^n \ni 0$ のある開近傍，Y を $\boldsymbol{R}^k \ni 0$ のある開近傍とし，$f : X \to Y$ を $f(0) = 0$ を満たす C^∞ 写像とする．

(1)　$f'(0)$ が onto (i.e. $\operatorname{rank} f'(0) = k$) なら，$X$ と Y を小さく取り直すことにより，C^∞ 写像 $g : Y \to X$ で Y 上 $f \circ g = 1$，即ち $f(g(y)) = y$, $y \in Y$ を満たすものが存在する．

(2)　$f'(0)$ が 1 対 1 (i.e. $\operatorname{rank} f'(0) = n$) なら，$X$ と Y を小さく取り直すことにより，C^∞ 写像 $g : Y \to X$ で X 上 $g \circ f = 1$，即ち $g(f(x)) = x$, $x \in X$ を満たすものが存在する．

証明　(1)　定理 6.2.1 により線形写像 $h : \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}^n$ で $f'(0) \circ h = 1$ となるものが存在する．

$$\widetilde{f}(x_1, \cdots, x_n) = ((f \circ h)(x_1, \cdots, x_k), x_{k+1}, \cdots, x_n)$$

とおけば $\widetilde{f}'(0) = 1$ であるから逆関数定理により $\boldsymbol{R}^n$ の 0 のある近傍 $\widetilde{Y}$ で定義された C^∞ 写像 $\widetilde{g} : \widetilde{Y} \to X$ で $\widetilde{f} \circ \widetilde{g} = 1$ を満たすものが存在する．$\widetilde{g}_p(x) = x_p$ $(p = k+1, \cdots, n)$ であることから

$$l(x_1, \cdots, x_k) = (\widetilde{g}_1(x_1, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0), \cdots, \widetilde{g}_k(x_1, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)),$$
$$g(x_1, \cdots, x_k) = (h \circ l)(x_1, \cdots, x_k)$$

ととればよい．

(2) 定理 6.2.1 により線形写像 $h:\boldsymbol{R}^k\to\boldsymbol{R}^n$ で $h\circ f'(0)=1$ となるものが存在する．$\widetilde{f}=h\circ f$ とすれば $\widetilde{f}'(0)=1$ であるから逆関数の定理により C^∞ 写像 $\widetilde{g}:\widetilde{Y}\to X$ で $\widetilde{g}\circ\widetilde{f}=1$ を満たすものが存在する．$g=\widetilde{g}\circ h$ ととればよい． □

$\varphi(x)$ を $\boldsymbol{R}^n$ 上の実数値関数とするとき

$$\varphi'(x)=\nabla\varphi(x),$$
$$\varphi''(x)=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right)$$

とおく．$\varphi'(x_0)=0$ が成り立つとき x_0 を $\varphi(x)$ の**危点** (critical point) という．$\varphi'(x_0)=0$ かつ $\det\varphi''(x_0)\neq 0$ のとき，x_0 を**非退化**な危点という．

補題 6.2.3 x_0 が $\varphi(x)$ の非退化な危点のとき，定数 $\epsilon>0$ が存在し $0<|x-x_0|<\epsilon$ において $\varphi'(x)\neq 0$ である．

証明 $f(x)=\varphi'(x)$ とおけばヤコビ行列 $f'(x)=\varphi''(x)$ は $x=x_0$ において正則であるから，逆関数の定理によりこの補題が成り立つ． □

次の定理は通常**モース** (Morse) **の補題**と呼ばれる．

定理 6.2.4 $X\subset\boldsymbol{R}^n$ を開集合とし，$\varphi(x)$ は X 上で定義された実数値関数とする．$x_0\in X$ が $\varphi(x)$ の非退化な危点のとき，0 の近傍 $U\subset\boldsymbol{R}^n$，x_0 の近傍 $V\subset\boldsymbol{R}^n$ と C^∞-微分同相写像 $\mathcal{H}:V\to U$ が存在し

$$\varphi\circ\mathcal{H}^{-1}(y)=\varphi(x_0)+\frac{1}{2}\left(y_1^2+\cdots+y_r^2-y_{r+1}^2-\cdots-y_n^2\right)$$

となる．ここで r は $\varphi''(x_0)$ の正の固有値の個数である．

証明 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ を $\varphi''(x_0)$ の正の固有値，$\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_n$ を負の固有値とする．固有ベクトルを並べた行列 $T\in O(n)$ をとれば

$$T^{-1}\varphi''(x_0)T=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

となる．右辺は $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ を対角成分とする対角行列である．

$$z=\operatorname{diag}\left(\sqrt{|\lambda_1|},\cdots,\sqrt{|\lambda_n|}\right)T^{-1}(x-x_0) \tag{6.4}$$

という変数変換により

$$\begin{aligned}\varphi(x)-\varphi(x_0)&=\frac{1}{2}\langle\varphi''(x_0)(x-x_0),(x-x_0)\rangle+O(|x|^3)\\&=\frac{1}{2}\left(z_1^2+\cdots+z_r^2-z_{r+1}^2-\cdots-z_n^2\right)+O(|z|^3)\end{aligned}$$

となる．$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\psi(z)$ とおけばテイラー展開によって

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(tz)dt \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j,k} q_{jk}(z)z_j z_k = \frac{1}{2}\langle z, Q(z)z\rangle,\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$Q(z) = (q_{jk}(z)), \quad q_{jk}(z) = 2\int_0^1 (1-t)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_j \partial z_k}\right)(tz)dt$$

となる．これより

$$Q(0) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

となる．$y = \mathcal{H}(x)$ を $y = A(z)z$ という形で作る．ここで $A(z)$ は $A(0) = I$ を満たす z に関して C^∞ な行列である．従って

$$\varphi \circ \mathcal{H}^{-1}(y) = \varphi(x_0) + \frac{1}{2}\langle A(z)z, Q(0)A(z)z\rangle$$

となるべきである．(6.5) により $A(z)$ を

$$Q(z) = {}^tA(z)Q(0)A(z) \tag{6.6}$$

となるように構成すればよい．

Sym$(n, \boldsymbol{R})$ を $n \times n$ 実対称行列全体とする．$M_n(\boldsymbol{R})$, Sym$(n, \boldsymbol{R})$ は自然にそれぞれ，n^2 次元，$n(n+1)/2$ 次元のベクトル空間になる．写像

$$\mathcal{F} : M_n(\boldsymbol{R}) \ni A \to {}^tAQ(0)A \in \mathrm{Sym}\,(n, \boldsymbol{R})$$

を考える．$A = I$ におけるこの写像の微分（ヤコビ行列）は

$$\frac{d}{d\epsilon}\,{}^t(I + \epsilon\,\delta A)Q(0)(I + \epsilon\,\delta A)\Big|_{\epsilon=0}$$

を計算して

$$d\mathcal{F} : M_n(\boldsymbol{R}) \ni \delta A \to {}^t(\delta A)Q(0) + Q(0)(\delta A) \in \mathrm{Sym}\,(n, \boldsymbol{R})$$

となる．$d\mathcal{F}$ は onto である．実際 $\delta B \in \mathrm{Sym}\,(n, \boldsymbol{R})$ に対して $\delta A = \frac{1}{2}Q(0)^{-1}\delta B$ とおけば $d\mathcal{F}(\delta A) = \delta B$ が満たされる．

定理 6.2.2 (1) により，Sym$(n, \boldsymbol{R})$ の 0 のある近傍で定義され，$M_n(\boldsymbol{R})$ の 0 のある近傍に値をとる C^∞ 写像 $\mathcal{G}$ が存在し $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = i_d$ (恒等写像）となる．$A(z) = \mathcal{G}(Q(z))$ とおけば (6.6) が成り立つ．$d\mathcal{H}(0) = A(0) = I$ であるから，

写像 $z \to y = \mathcal{H}(x) = A(z)z$ は 0 のある近傍から 0 のある近傍への微分同相である． □

$y = \mathcal{H}(x)$ のヤコビアンを計算しよう．$A_{ij}(z)$ を $A(z)$ の (i,j)-成分とすれば $y_i = \sum_k A_{ik}(z)z_k$ であるから $\dfrac{\partial y_i}{\partial z_j}(0) = A_{ij}(0)$．これより $\left|\dfrac{\partial y}{\partial z}(0)\right| = |\det A(0)| = 1$. (6.4) により

$$\left|\frac{\partial x}{\partial y}(0)\right| = |\det \varphi''(x_0)|^{-1/2} \tag{6.7}$$

となる．

6.3 漸近展開

$$I(\lambda) = \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x)} a(x)dx \tag{6.8}$$

という積分の $\lambda \to \infty$ での挙動を調べよう．次の仮定を満たすものとする．

X は $\boldsymbol{R}^n$ の中の有界な開集合で，

(A-1)　$a(x) \in C_0^\infty(X)$,

(A-2)　$\varphi(x) \in C^\infty(X)$ は実数値．

定理 6.3.1　$\varphi(x)$ が X 上 $\varphi'(x) \neq 0$ を満たすならば，任意の $N > 0$ に対し定数 $C_N > 0$ が存在し

$$|I(\lambda)| \leq C_N \lambda^{-N} \|a\|_{H^N(\boldsymbol{R}^n)}, \quad \forall \lambda > 1$$

が成り立つ．

証明　微分作用素

$$L = \frac{1}{i\lambda|\varphi'(x)|^2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

を考えれば

$$Le^{i\lambda\varphi} = e^{i\lambda\varphi}$$

が成り立つ．部分積分によって

$$I(\lambda) = \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x)} \, ({}^tL)^N a(x)dx$$

であるから定理が得られる． □

次の定理がこの章の中心結果である．

定理 6.3.2 $\varphi(x)$ は X 上に唯 1 つの危点 x_0 を持ち，それが非退化とする．このとき $j = 0, 1, 2, \cdots$ に対して階数 $2j$ 以下の微分作用素 L_j が存在し，任意の整数 $N > 0$ と $s > n/2$ に対して

$$\left| I(\lambda) - e^{i\lambda\varphi(x_0)}\lambda^{-n/2}\sum_{j=0}^{N}\lambda^{-j}\big(L_j a\big)(x_0) \right|$$
$$\le C\,\lambda^{-N-n/2}\|a\|_{H^{2N+s}(\boldsymbol{R}^n)}, \quad \forall\lambda \ge 1$$

が成り立つ．ここで C は N, s に依存する定数である．特に

$$L_0 = (2\pi)^{n/2}|\det\varphi''(x_0)|^{-1/2}e^{\operatorname{sgn}\varphi''(x_0)\,\pi i/4}$$

である．

証明 x_0 の近傍 V を十分小さく選び $\chi \in C_0^\infty(V)$ を x_0 の近くで 1 になるようにとる．定理 6.3.1 によって

$$\left|\int_{\boldsymbol{R}^n}(1-\chi(x))e^{i\lambda\varphi(x)}a(x)dx\right| \le C_N\lambda^{-N}\sum_{|\alpha|\le N}\|\partial^\alpha a\|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)} \qquad (6.9)$$

のように評価される．定理 6.2.4 によれば V においては変数変換 $x = x(y)$ により

$$\varphi(x(y)) = \varphi(x_0) + \frac{1}{2}\left(y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_n^2\right)$$

となるから

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\chi(x)e^{i\lambda\varphi(x)}a(x)dx = e^{i\lambda\varphi(x_0)}\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{i\lambda\langle Ay,y\rangle/2}u(y)dy,$$
$$A = \operatorname{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1),$$
$$u(y) = \chi(x(y))a(x(y))\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|$$

という形に書き換えられる．補題 6.1.3 と (6.7) により定理が示される． □

6.4 曲面上の幾何学の初歩

定理 6.3.2 は局所座標をとれば曲面上の積分にも適用できるのだが，その結果を表現するには幾何学的概念が不可欠になる．ここではそのための最小限の準備をする．必要になるのは曲面の中の小部分，即ち局所的な議論なので，曲面全体に係るもの，即ち大域的な議論は微分幾何学の専門書に譲る．

6.4.1 接空間

第 4 章第 2 節の意味での曲面 S が与えられたとし，点 $p \in S$ をとる．p を始点とし S に接するベクトルを p における S の**接ベクトル** (tangent vector) といい，その全体を p における S の**接空間** (tangent space) という．図形的に

は接ベクトルの始点は p なのだが，数学的扱いとしては始点を原点に移して考えることが多い．後者の場合には p における接空間を $T_p(S)$ と書く．これは $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル部分空間である．前者の場合には $p+T_p(S)$ が接空間である．

接ベクトルを計算するには次のようにする．$t=0$ において点 p を通る S の中の C^1-曲線 $c(t)=(c_1(t),\cdots,c_n(t))$, 即ち $c(t)\in S$, $t\in(-\epsilon,\epsilon)$, $c(0)=p$ となる C^∞-曲線をとれば

$$\frac{dc}{dt}(0)=\Big(\frac{dc_1}{dt}(0),\cdots,\frac{dc_n}{dt}(0)\Big)\in T_p(S)$$

である．S が $x=x(u)$, $u\in U$, U は $\boldsymbol{R}^{n-1}$ の開集合で $p=x^0=x(u^0)$ とパラメータ表示されているとき $c(t)=x(u(t))$, $u(t)$ は U 内の曲線で $u(0)=u^0$ と表されるから

$$\frac{dc}{dt}(0)=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\Big(\frac{\partial x}{\partial u_i}\Big)(u^0),\quad \alpha_i=\frac{du_i}{dt}(0)$$

となる．曲面の仮定により $\dfrac{\partial x}{\partial u_i}(u^0)$, $i=1,\cdots,n-1$ は 1 次独立であるから，これらは $T_p(S)$ の基底となり，$T_p(S)$ の次元は $n-1$ である．

S が $x_n=f(x_1,\cdots,x_{n-1})$ で表され，$p\in S$ の座標が $x^0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ であるときには上のパラメータ表示で $t=x_i-x_i^0$, $u(t)=(0,\cdots,0,t,0,\cdots,0)$ (i 座標のみが t) とすればよい．このとき $T_p(S)$ の基底が

$$(1,0,\cdots,0,a_1),\quad \cdots,\quad (0,\cdots,0,1,a_{n-1}),\quad a_i=\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_1^0,\cdots,x_{n-1}^0)$$

であることが分かり，$p+T_p(S)$ は

$$x_n-x_n^0=\sum_{i=1}^{n-1}a_i(x_i-x_i^0)$$

で表されることが分かる．これは $x_n=f(x_1,\cdots,x_{n-1})$ を x^0 においてテイラー展開して 1 次近似をとったものである．

6.4.2 第 1 基本形式

$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})\in\boldsymbol{R}^{n-1}$ に対して

$$v_\xi=\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\frac{\partial x}{\partial u_i}(u)\in T_{x(u)}(S)$$

とおく．$\langle x,y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$ を $\boldsymbol{R}^n$ のユークリッド内積とすれば

$$\langle v_\xi,v_\eta\rangle=\sum_{i,j=1}^{n-1}g_{ij}(u)\xi_i\eta_j, \tag{6.10}$$

$$g_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}(u), \frac{\partial x}{\partial u_j}(u) \right\rangle \tag{6.11}$$

となる．(6.10) は $T_{x(u)}(S)$ 上の内積である．これを曲面 S の**第 1 基本形式**，あるいは**リーマン計量**という．これを用いれば接ベクトル v_ξ の長さの 2 乗は

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}(u)\xi_i\xi_j$$

となる．このことを

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}(u)du_i du_j \tag{6.12}$$

と書く習慣がある．リーマン計量を計算するには次のようにすればよい．S をパラメータ $u = (u_1, \cdots, u_{n-1})$ で表示し，S 上の微小な線分の長さを ds とすれば

$$ds^2 = (dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2$$

である．これに

$$dx_i = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial x_i}{\partial u_k}(u)du_k$$

を代入して計算すれば (6.12) が得られる．

6.4.3　法ベクトル

$p \in S$ における S の接空間 $p + T_p(S)$ に直交する $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルを S の p における**法ベクトル** (normal vector) という．法ベクトルを表示するときも始点を p にとる場合と原点にとる場合がある．法ベクトルの向きを逆にしてもやはり法ベクトルである．以下の議論では法ベクトルの向きをどちらにとっても影響はない．

S が $x = x(u)$ のようにパラメータ表示されているとき $x(u)$ における法ベクトルは，始点を原点にとって

$$N = (A_1, \cdots, A_n), \quad A_i = (-1)^{i-1}\frac{\partial(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n)}{\partial(u_1, \cdots, u_{n-1})}$$

で与えられる．ただし A_i は x_i を除いたもののヤコビ行列式である．実際，行列式

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_i} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_i} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_n} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} = 0$$

の左辺を最後の行に関して展開することにより，$\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, N_p \right\rangle = 0$, $i = 1, \cdots, n-1$ であるから N は $T_{x(u)}(S)$ に直交する．

S が $F(x) = 0$ で定義されているときには $\nabla F(x)$ が $x \in S$ における（原点を始点にとったときの）法ベクトルである．実際，$v \in T_x(S)$ を任意にとり，$c(t)$ を $c(0) = x$, $\frac{dc}{dt}(0) = v$ を満たす S 上の C^∞-曲線とすると，$F(c(t)) = 0$ を t で微分して $t = 0$ とおけば

$$\langle \nabla F(x), v \rangle = 0$$

となるが，$v \in T_x(S)$ は任意にとれるから $\nabla F(x)$ は $T_x(S)$ に直交している．

6.4.4　第 2 基本形式

第 1 基本形式は曲面上の長さを定めるものであったが，第 2 基本形式は曲面の曲がり具合を定める目安である．$N(x) = (N_1(x), \cdots, N_n(x))$ を $x \in S$ における（原点を始点とした）S の単位法ベクトルとする．すなわち $\sum_{i=1}^n N_i(x)^2 = 1$, $N(x) \perp T_x(S)$ である．$p \in S$, $v \in T_p(S)$ をとり，$c(t)$ を S 内の C^∞-曲線で，$c(0) = p$, $\frac{dc}{dt}(0) = v$ を満たすものとする．t を変化させて $N(c(t))$ を見れば，それは曲線 $c(t)$ に沿う法ベクトルの変化を見ることになる．そのために $\frac{d}{dt}N(c(t))$ を計算する．

$$\frac{d}{dt}N_i(c(t))\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x_j}(c(0))\frac{dc_j}{dt}(0)$$

であるから，写像

$$T_p(S) \ni v \to \frac{d}{dt}N_i(c(t))\Big|_{t=0} \in \boldsymbol{R}^n$$

は線形である．$\langle N(c(t)), N(c(t)) \rangle = 1$ を t で微分すれば

$$\left\langle N(c(0)), \frac{dN(c(t))}{dt}\Big|_{t=0} \right\rangle = 0$$

であるから

$$W_p(v) = \frac{d}{dt}N(c(t))\Big|_{t=0}$$

とおけば W_p は $T_p(S)$ から $T_p(S)$ への線形写像である．W_p を p における S の**ワインガルテン** (Weingarten) **写像**という．**形状作用素** (shape operator) と呼ばれることもある．

補題 6.4.1　$p \in S$, $v \in T_p(S)$ とし $c(t)$ を $c(0) = p$, $\frac{dc}{dt}(0) = v$ を満たす S 内の C^∞-曲線とすれば

$$\langle W_p(v), v \rangle = -\left\langle N(p), \frac{d^2c}{dt^2}(0) \right\rangle.$$

証明は $\left\langle \frac{dc(t)}{dt}, N(c(t)) \right\rangle = 0$ を微分すれば得られるので演習問題とする.

補題 6.4.2 W_p は $T_p(S)$ 上の対称作用素である. 即ち

$$\langle W_p(v), w\rangle = \langle v, W_p(w)\rangle, \quad \forall v, w \in T_p(S).$$

証明 曲面 S が $x_n = f(x)$, $x = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ で表されているものとし, $p(x) = (x, f(x))$ とおく. $p = p(0) \in S$ としても一般性を失わない. $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ とおけば

$$e_i(x) = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0, \partial_i f(x)), \quad 1 \leq i \leq n-1$$

(i 番目の成分を 1 とする) は $T_{p(x)}(S)$ の基底となる. $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}) \in \boldsymbol{R}^{n-1}$ に対して $v = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i e_i(0)$ とし, $c(t, \xi)$ を $c(0, \xi) = p$, $\dfrac{dc}{dt}(0, \xi) = v$ を満たす S 内の C^∞-曲線とする. $v = (v_1, \cdots, v_n)$ とすれば $1 \leq i \leq n-1$ のとき $v_i = \xi_i$ であることに注意しよう. $p(x)$ における S の単位法線ベクトルは

$$N(x) = \frac{(-\partial_1 f(x), \cdots, -\partial_{n-1} f(x), 1)}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i f(x))^2 + 1\right)^{1/2}}$$

である. $\widetilde{N}(x) = (-\partial_1 f(x), \cdots, -\partial_{n-1} f(x), 1)$ とおけば

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left\langle N(c(t,\xi)), \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i e_i(0) \right\rangle \\
&= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i f(c(t,\xi)))^2 + 1\right)^{-1/2} \Bigg|_{t=0} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \langle \widetilde{N}_i(0), e_i(0)\rangle \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i f(0))^2 + 1\right)^{-1/2} \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \frac{d}{dt} \partial_i f(c(t,\xi)) \Big|_{t=0}
\end{aligned}$$

となるが右辺第 1 項は 0 である.

$$\frac{d}{dt} \partial_i f(c(t,\xi)) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \xi_j$$

であるから $w = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i e_i(0)$ とおくと

$$\langle W_p(v), w\rangle = -\left(\sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i f(0))^2 + 1\right)^{-1/2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \xi_i \eta_j \quad (6.13)$$

となり, 右辺は ξ, η に関して対称な 2 次形式であるから補題が示された. □

補題 6.4.2 に現れた 2 次形式 $\langle W_p(v), w\rangle$ を曲面 S の p における**第 2 基本形式**という.

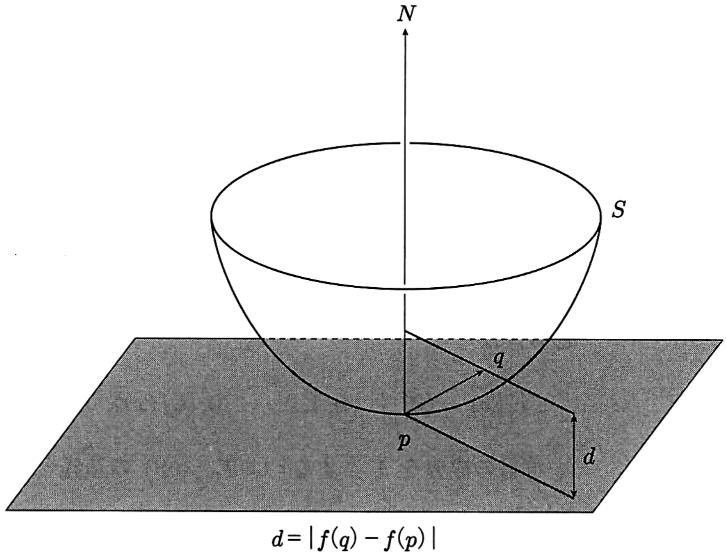


図 6.1　第 2 基本形式.

上の証明が意味することを考えよう．$n=3$, $f(0)=\partial_1 f(0)=\partial_2 f(0)=0$ とする．このとき

$$p=(0,0,0)\in S, \quad e_1(0)=(1,0,0), \quad e_2=(0,1,0)$$

であり，$v=w=(\xi_1,\xi_2)$ とおけば

$$\langle W_p(v),v\rangle=-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0)\xi_i\xi_j$$

である．ξ_1,ξ_2 を微小量としてテイラー展開を考えれば

$$f(0)-f(v)=\langle W_p(v),v\rangle+O(|\xi|^3)$$

となる．よって $q=(v,f(v))=(q_1,q_2,q_3)$ とすれば

$$-q_3=\langle W_p(v),v\rangle+O(|\xi|^3)$$

である．従って特に $\langle W_p(v),v\rangle$ が正定値（負定値）な 2 次形式であれば p の近くで S は上向き（下向き）に湾曲している．図 6.1 からその様子が想像できるであろう．このように第 2 基本形式は曲面の曲がっている様子を記述している．

6.4.5　曲率

W_p は対称行列で表されるからその固有値 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ はすべて実数で，対応する固有ベクトル $e_1,\cdots,e_{n-1}$ を $T_p(S)$ の正規直交系になるようにとることができる．$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_{n-1}$ ととり，補題 6.4.1 で $v=e_i$ とすれば

$$\lambda_i = \langle W_p(e_i), e_i \rangle = -\left\langle N(p), \frac{d^2c}{dt^2}(0) \right\rangle$$

であるから，$e_1, e_2, \cdots$ は S が p において最も大きく曲がっている方向，2番目に大きく曲がっている方向，$\cdots$ を表していることが分かる．

$$K(p) = \det(W_p) = \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} \tag{6.14}$$

を p における S の**全曲率** (total curvature)，あるいは**ガウス曲率** (Gaussian curvature) という．

$$H(p) = \frac{\mathrm{tr}\,(W_p)}{n-1} = \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}}{n-1} \tag{6.15}$$

を p における S の**平均曲率** (mean curvature) という．また λ_i を**主曲率** (principal curvature)，e_i を**主曲率方向** (direction of principal curvature) という．法ベクトルを逆向きにとれば固有値の符号が変わる．そのため S が閉曲面のときには法ベクトルを外向きに指定しておくことが多い．

曲面 S が $x_n = f(x), x = (x_1, \cdots, x_n)$ で表されているときには (6.13) よりこれらの曲率は

$$K(x) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i f(x))^2 + 1 \right)^{-(n-1)/2} \det\big(a_{ij}(x)\big), \tag{6.16}$$

$$H(x) = \frac{a_{11}(x) + \cdots + a_{n-1n-1}(x)}{(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i f(x))^2 + 1 \right)^{1/2}}, \tag{6.17}$$

$$a_{ij}(x) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \tag{6.18}$$

と書ける．

例 6.4.3 $S = \{x \in \boldsymbol{R}^n\,;\, |x| = r\}$ のとき，$p = (0, \cdots, 0, r) \in S$ における曲率を計算しよう．このときは $f(x) = (r^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2)^{1/2}$ であるから $a_{ij}(0) = \delta_{ij}/r$ となり，主曲率は

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \frac{1}{r}$$

となる．

曲率と曲面の凸性との関係を簡単に述べよう．閉曲面 S が**凸** (convex) であるとは，任意の $p \in S$ に対して S が接空間 $p + T_p(S)$ の片側にあることである（図 6.2 を参照）．さらに $S \cap \{p + T_p(S)\} = \{p\}$ がすべての $p \in S$ に対して成り立つとき，S は**狭義凸** (strictly convex) であるという．狭義凸性と曲率には次の関係がある．

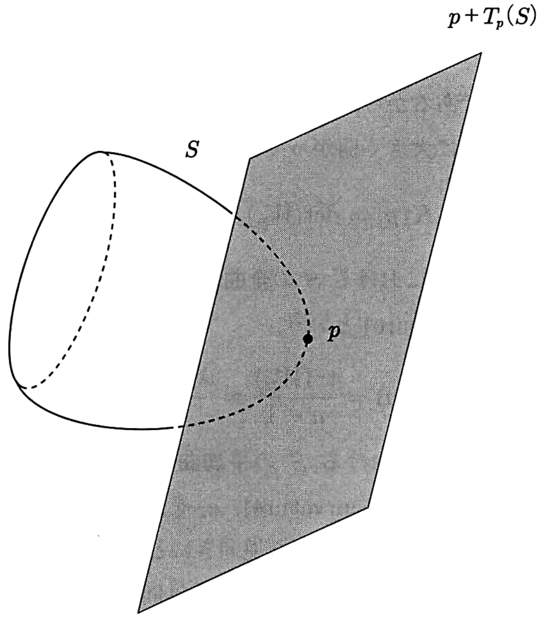


図 6.2　凸曲面.

定理 6.4.4　閉曲面 S に対して次の 2 つの主張は同値である.

(1)　任意の $p \in S$ に対してガウス曲率 $K(p)$ は零でない.

(2)　任意の $p \in S$ に対して W_p は定値作用素（常に $W_p > 0$, または $W_p < 0$）である.

このいずれかの条件が満たされるとき，S は狭義凸である.

今の場合には $W_p > 0$ ($W_p < 0$) とは W_p の固有値がすべて正（負）であることを意味する．上の定理の証明は例えば参考文献 [26], 第 13 章にある.

6.5　曲面上での定常位相の方法

S を $\boldsymbol{R}^n$ の中の $n-1$ 次元曲面とし，$a(\xi)$ は S 内にコンパクトな台を持つ C^∞-関数とする．$a(\xi)$ を $\boldsymbol{R}^n$ 上の超関数とみなすとき，そのフーリエ逆変換は $(2\pi)^{-n/2}$ という定数を除いて

$$I(x) = \int_S e^{ix\cdot\xi} a(\xi) dS \tag{6.19}$$

となる．$I(x)$ の $|x| \to \infty$ のときの漸近展開を計算しよう.

$a(\xi)$ の台を含む S 内の有界な開集合 $S_0 \subset S$ をとれば S_0 も曲面になっている．まず補題 4.2.8 にあるような 1 の分解 $\{\chi_j\}_{j=1}^N$ をとる．即ち $\chi_j \in C^\infty(S)$ で S_0 上 $\sum_{j=1}^N \chi_j = 1$ であり，χ_j の台は十分小さいものをとることができる．このとき $a_j(\xi) = \chi_j(\xi) a(\xi)$ とおけば

$$I(x) = \sum_{j=1}^{N} \int_S e^{ix\cdot\xi} a_j(\xi) dS$$

となり，これは (6.19) で $a(\xi)$ の台が十分小さい場合を考えればよいことを意味している．

次に $a(\xi)$ の台が十分小さいときにはその台の近傍で局所座標をとることができる．即ち $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ とするとき，どれかの ξ_j を残りの変数の関数として表すことができる．そこで ξ_n が $\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$ の関数として表されると仮定しても一般性を失わない．$\theta = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$ とおき，$\xi_n = f(\theta)$ と表されているとしよう．このとき面積要素 dS は

$$dS = \left(1 + |\nabla f(\theta)|^2\right)^{1/2} d\theta$$

と書ける．θ は $\boldsymbol{R}^{n-1}$ の有界な開集合 X 上を動くとしてよい．そこで

$$b(\theta) = a(\theta, f(\theta)) \left(1 + |\nabla f(\theta)|^2\right)^{1/2} \in C_0^\infty(X)$$

とおけば，考えるべき積分は

$$I(x) = \int_X e^{ix\cdot\xi} b(\theta) d\theta,$$

$$x \cdot \xi = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \theta_i + x_n f(\theta)$$

と表される．また点 $(\theta, f(\theta))$ における S の単位法ベクトル $N(\theta)$ を

$$N(\theta) = \frac{(-\partial_1 f, \cdots, -\partial_{n-1} f, 1)}{\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\dfrac{\partial f}{\partial \theta_i}\right)^2\right)^{1/2}}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$$

と定めておく．点 $(\theta, f(\theta)) \in S$ における S のガウス曲率を $G(\theta)$ と書く．関数 $\theta \to x \cdot \xi$ のヘッセ行列は

$$\mathrm{Hess}\,(x \cdot \xi) = x_n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right) \tag{6.20}$$

であるから (6.16) より

$$\det \mathrm{Hess}\,(x \cdot \xi) = (-x_n)^{n-1} \left(1 + |\nabla f(\theta)|^2\right)^{(n-1)/2} G(\theta) \tag{6.21}$$

である．

補題 6.5.1 $\omega \in S^{n-1}$ のとき $\nabla_\theta (\omega \cdot \xi) = 0$ は，$\omega = \pm N(\theta)$ となることと同値である．

証明 $\nabla_\theta (\omega \cdot \xi) = 0 \Longleftrightarrow \omega_i = -\omega_n \partial_i f(\theta)$, $1 \le i \le n-1$ である．$\omega \neq 0$ であるからこのとき $\omega_n \neq 0$ であり

$$\nabla_\theta (\omega \cdot \xi) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\omega_i}{\omega_n} = \begin{cases} -\partial_i f(\theta), & 1 \le i \le n-1, \\ 1, & i = n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\omega}{\omega_n} = (1 + |\nabla f(\theta)|^2)^{1/2} N(\theta)$$

が分かる．最後の条件は $\omega = \pm N(\theta)$ と同値である． □

$S \ni \xi \to \omega \cdot \xi$ は S 上で定義された C^∞-関数である．$\omega \cdot \xi$ の危点は，その点における外向き法ベクトルと ω が平行になるような $\xi \in S$ である．

以後，次の仮定の下で考える．

仮定　$a(\xi)$ の台を含むある開集合 $S_0 \subset S$ 上で S のガウス曲率は零でない．

$\omega \in S^{n-1}$ を固定し $x = r\omega, r > 0$ とおく．(6.21) によって上の仮定の下では $\omega \cdot \xi$ の危点はすべて非退化である．よって補題 6.2.3 によってそれらは離散的であるから，$a(\xi)$ の台上には危点は有限個しかない．それを $\xi_c^{(k)}, k = 1, \cdots, m$ とする．1 の分解を用いて $a(\xi)$ を $\xi_c^{(j)}$ の小さい近傍の台を持つものとそれ以外とに分割する．

(I)　$a(\xi)$ の台上に $\omega \cdot \xi$ の危点がない場合．このとき，必要ならばまた 1 の分解を考えることにより $a(\xi)$ の台上で θ という局所座標をとれば，ある定数 $C > 0$ が存在し $|\nabla_\theta (\omega \cdot \xi)| > C$ となる．そこで

$$L = \left(ir|\nabla_\theta(\omega \cdot \xi)|^2\right)^{-1} \nabla_\theta(\omega \cdot \xi) \cdot \nabla_\theta$$

という微分作用素を考えれば

$$Le^{ix\cdot\xi} = e^{ix\cdot\xi}$$

であるから部分積分により

$$I(x) = \int_X e^{ix\cdot\xi} ({}^tL)^N b(\theta) d\theta$$

となる．これより

$$|I(x)| \le C_N r^{-N} \sup_\theta \sum_{|\alpha| \le N} |\partial_\theta^\alpha b(\theta)|, \quad \forall N > 0 \tag{6.22}$$

である．この評価を導くときにはガウス曲率に関する仮定を用いていないことに注意しよう．

(II)　$a(\xi)$ の台が危点 $\xi_c^{(j)}$ を含む場合．$\xi_c^{(j)} = \xi(\theta_c^{(j)}), \varphi(\theta) = \omega \cdot \xi$ とすれば定理 6.3.2 により

$$\left| I(x) - e^{ir\varphi(\theta_c^{(j)})} r^{-(n-1)/2} \sum_{k=0}^{N} r^{-k} (L_k b)(\theta_c^{(j)}) \right|$$
$$\le C_{Ns} r^{-N-(n-1)/2} \sup_\theta \sum_{|\alpha| \le 2N+s} |\partial_\theta^\alpha b(\theta)|$$

となる．ただし $s > (n-1)/2$ で，L_k は高々 $2k$ 階の微分作用素，特に

$$L_0=(2\pi)^{-(n-1)/2}|\det\varphi''(\theta_c^{(j)})|^{-1/2}e^{\operatorname{sgn}\varphi''(\theta_c^{(j)})\pi i/4}$$

である．(6.13), (6.20) によって $\xi=\pm\xi(\theta_c^{(j)})$ のとき

$$\operatorname{Hess}(\omega\cdot\xi)=\mp W_p$$

である．ただし W_p は $p=\xi(\theta_c^{(j)})$ におけるワインガルテン作用素である．よって

$$\operatorname{sgn}\operatorname{Hess}(\omega\cdot\xi)=\mp\operatorname{sgn}W_p$$

である．また (6.21) により

$$|\det\operatorname{Hess}(\omega\cdot\xi)|=|G(\theta_c^{(j)})|$$

である．以上によって次の定理が示された．

定理 6.5.2 $a(\xi)\in C_0^\infty(S)$ で S の曲率は $a(\xi)$ の台を含むある開集合上で 0 にならないとし，$N(\xi)$ を $\xi\in S$ における法ベクトルとするとき，任意の N と $s>(n-1)/2$ に対して

$$\begin{aligned}&\Bigl|I(x)-\sum_{j=1}^{m}e^{irN(\xi_+^{(j)})\cdot\xi_+^{(j)}}\sum_{k=0}^{N}r^{-(n-1)/2-k}(L_{+jk}a)(\xi_+^{(j)})\\&\quad-\sum_{j=1}^{m'}e^{-irN(\xi_-^{(j)})\cdot\xi_-^{(j)}}\sum_{k=0}^{N}r^{-(n-1)/2-k}(L_{-jk}a)(\xi_-^{(j)})\Bigr|\\&\le C_{Ns}r^{-N-(n-1)/2}\sup_{\xi\in S}\sum_{|\alpha|\le 2N+s}\bigl|\partial^\alpha a(\xi)\bigr|\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $\xi_\pm^{(j)}$ は $\omega=\pm N(\xi_\pm^{(j)})$ を満たす S 上の点で，$L_{\pm jk}$ は高々 $2k$ 階の微分作用素である．特に

$$L_{\pm j0}=(2\pi)^{(n-1)/2}|G(\xi_\pm^{(j)})|^{-1/2}e^{\mp\operatorname{sgn}W(\xi_\pm^{(j)})\pi i/4}$$

で，$G(\xi)$, $W(\xi)$ は $\xi\in S$ におけるガウス曲率，ワインガルテン写像である．また $\partial^\alpha a(\xi)$ は局所座標で表した $a(\xi)$ の α 階導関数である．

特に $S=S^{n-1}$ とする．$N(\xi)=\xi$ ととれば例 6.4.3 に述べたように $G(\xi)=1$ である．また $\omega\in S^{n-1}$ に対して $\omega=\pm N(\xi_\pm)$ となる $\xi_\pm$ は $\xi_\pm=\pm\omega$ である．よって定理 6.5.2 により次の補題が得られる．

補題 6.5.3 $\varphi(\theta)\in C^\infty(S^{n-1}),\omega\in S^{n-1}$ とする．$k\to\infty$ のとき

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{-(n-1)/2}\int_{S^{n-1}}e^{ik\omega\cdot\theta}a(\theta)d\theta\\&=\frac{e^{i(k-(n-1)\pi/4)}}{k^{(n-1)/2}}\varphi(\omega)+\frac{e^{-i(k-(n-1)\pi/4)}}{k^{(n-1)/2}}\varphi(-\omega)+O(k^{-(n+1)/2})\end{aligned}$$

が成り立つ．

第 7 章
波動方程式

この章では波動方程式の基本解とその性質を述べる．さらに波面集合を導入し解の特異性の伝播という観点から波動現象を考える．

7.1 基本解

$\boldsymbol{R}^n$ で波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) = \Delta_x u, \quad t > 0, \\ u(0,x) = f(x), \quad \partial_t u(0,x) = g(x) \end{cases} \tag{7.1}$$

を考える．この方程式に対する基本解を

$$\begin{cases} \partial_t^2 E(t,x) = \Delta_x E(t,x), \quad t > 0, \\ E(0,x) = 0, \quad \partial_t E(0,x) = \delta(x) \end{cases} \tag{7.2}$$

を満たす超関数として定義しよう．(7.2) を用いれば (7.1) の解を次のように表示できる：$*$ を x に関する合成積として

$$u(t,x) = \partial_t E(t) * f + E(t) * g.$$

実際，次のように計算すればよい．$u_1(t) = E(t) * f$, $u_2(t) = E * g$ とおけば，$\partial_t^2 u_i = \Delta_x u_i$ であるから $\partial_t^2(\partial_t u_i) = \Delta_x(\partial_t u_i)$. よって $u = \partial_t u_1 + u_2$ は $\partial_t^2 u = \Delta_x u$ を満たす．$u(0,x) = \partial_t u_1(0,x) + u_2(0,x) = \delta(x) * f(x) = f(x)$ である．$t > 0$ のとき $\partial_t u(t,x) = \partial_t^2 u_1(t,x) + \partial_t u_2(t,x) = \Delta_x E(t,x) * f(x) + \partial_t E(t,x) * g$ であるから $t \to 0$ として $\partial_t u(0,x) = \delta(x) * g(x) = g(x)$ となる．

さて (7.2) を解くのに 2 つの立場

(1) $E(t,x)$ を t をパラメータに持つ x の超関数と見る

(2) $E(t,x)$ を t, x 両方の変数に関する超関数と見る

がある．まず (1) の立場で考えてみよう．

$E(t,x) \in \mathcal{S}'$ であるとしその x に関するフーリエ変換を $\hat{E}(t,\xi)$ とする．(7.2) をフーリエ変換すれば

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{E}(t,\xi) = -|\xi|^2 \hat{E}(t,\xi), & t > 0, \\ \hat{E}(0,\xi) = 0, & \partial_t \hat{E}(0,\xi) = (2\pi)^{-n/2} \end{cases} \tag{7.3}$$

となるから

$$\hat{E}(t,\xi) = (2\pi)^{-n/2} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$$

であり

$$E(t,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} d\xi \tag{7.4}$$

となる．この積分はもちろん，超関数としてのフーリエ逆変換の意味である．

積分 (7.4) を計算するのに

$$(2\pi)^{-n} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} e^{-\epsilon|\xi|} d\xi, \quad \epsilon > 0$$

を考える．まず $n = 1$ の場合を考える．

補題 7.1.1 $0 \neq a \in \boldsymbol{R}$ のとき

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} e^{-\epsilon x} dx = (\operatorname{sgn} a) \frac{\pi}{2}$$

証明 $a > 0$ の場合を示せばよい．$t > 0$ に対して

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} e^{-tx} dx$$

とおけば

$$f'(t) = -\int_0^\infty \sin(ax) e^{-tx} dx = -\frac{a}{a^2 + t^2}, \quad \lim_{t \to \infty} f(t) = 0$$

であるから

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{t}{a}\right)$$

となり，補題が示される． □

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty e^{ix\xi} \frac{\sin(x\xi)}{\xi} e^{-\epsilon|\xi|} d\xi &= 2 \int_0^\infty \cos(x\xi) \frac{\sin(t\xi)}{\xi} e^{-\epsilon\xi} d\xi \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin((x+t)\xi) - \sin((x-t)\xi)}{\xi} e^{-\epsilon\xi} d\xi \end{aligned}$$

であるから，補題 7.1.1 によって $\epsilon \to 0$ のとき右辺は，$0 < x - t < x + t$ のとき 0，$x - t < 0 < x + t$ のとき π，$x - t < x + t < 0$ のとき 0 となる．よって次の定理が示された．

定理 7.1.2　1 次元の波動方程式の基本解は $t>0$ のとき

$$E(t,x)=\begin{cases}1/2, & |x|<t,\\ 0, & t<|x|\end{cases}$$

で与えられる.

この基本解により (7.1) の解は

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(y)dy \tag{7.5}$$

と書ける.

$n=3$ の場合を考えよう.

補題 7.1.3　$0\neq k\in \boldsymbol{R}$ のとき

$$\int_{S^2}e^{ik\omega\cdot x}d\omega=4\pi\frac{\sin(kr)}{kr},\quad r=|x|.$$

証明　x/r 方向に座標軸をとって極座標を考えれば,

$$\int_{S^2}e^{ik\omega\cdot x}d\omega=2\pi\int_0^\pi e^{ikr\cos\theta}\sin\theta d\theta=4\pi\frac{\sin(kr)}{kr}$$

となる. □

上の補題と

$$\int_0^\infty\cos(ak)e^{-\epsilon k}dk=\frac{\epsilon}{a^2+\epsilon^2}$$

を使えば

$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{R}^3}e^{ix\cdot\xi}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}e^{-\epsilon|\xi|}d\xi\\ &=\frac{4\pi}{r}\int_0^\infty\sin(tk)\sin(rk)e^{-\epsilon k}dk\\ &=\frac{2\pi}{r}\int_0^\infty\Big(\cos\left((t-r)k\right)-\cos\left((t+r)k\right)\Big)e^{-\epsilon k}dk\\ &=\frac{2\pi}{r}\left(\frac{\epsilon}{(t-r)^2+\epsilon^2}-\frac{\epsilon}{(t+r)^2+\epsilon^2}\right)\end{aligned}$$

となる. (3.22) を用いれば

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{(t-r)^2+\epsilon^2}&=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{t-t-i0}-\frac{1}{t-r+i0}\right)\\ &=\pi\delta(t-r)\end{aligned}$$

であるから次の定理が証明できた.

定理 7.1.4　$n=3$ のときの基本解は

$$E(t,x)=\frac{1}{4\pi r}\delta(t-r),\quad r=|x|$$

で与えられる.

この基本解により

$$E(t)*g = \frac{1}{4\pi}\int_{\boldsymbol{R}^3}\frac{1}{|x-y|}\delta(t-|x-y|)g(y)dy$$
$$= \frac{1}{4\pi t}\int_{|x-y|=t} g(y)dS$$

となる．ただし dS は曲面 $S=\{|x-y|=t\}$ の面積要素である．$y\in S$ は $y=x+t\omega,\ \omega\in S^2$ と書けるから，$dS=t^2 d\omega$ であり

$$E(t)*g = \frac{t}{4\pi}\int_{S^2} g(x+t\omega)d\omega$$

となる．従って (7.1) の解 $u(t,x)$ は

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{S^2} f(x+t\omega)d\omega\right) + \frac{t}{4\pi}\int_{S^2} g(x+t\omega)d\omega \tag{7.6}$$

と書ける．

$n=2$ の場合は次のように考える．$u(t,x_1,x_2)$ が 2 次元の波動方程式を満たすならば変数 x_3 を補って 3 次元の波動方程式を満たしている．そこで (7.6) において $f=0,\ g=g(x_1,x_2)$ とすれば解は

$$u(t,x_1,x_2) = \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(x_1+t\sin\theta\cos\phi, x_2+t\sin\theta\sin\phi)\sin\theta d\theta d\phi$$

となる．さらに $y_1=t\sin\theta\cos\phi,\ y_2=t\sin\theta\sin\phi$ とおけば $dy_1dy_2 = t^2\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi$ であるが $(y_1^2+y_2^2)/t^2=\sin^2\theta$ であるから

$$t\sin\theta d\theta d\phi = \frac{1}{\sqrt{t^2-y_1^2-y_2^2}}dy_1dy_2$$

となる．2 つの領域 $\{(\theta,\phi)\,;\,0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le 2\pi\}$, $\{(\theta,\phi)\,;\,\pi/2\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi\}$ がともに $\{(y_1,y_2)\,;\,y_1^2+y_2^2\le t^2\}$ に 1 対 1 に写されるから

$$u(t,x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{y^2+y^2\le t^2}\frac{g(x_1+y_1,x_2+y_2)}{\sqrt{t^2-y_1^2-y_2^2}}dy_1dy_2$$

となる．よって次の定理が示された．

定理 7.1.5　$n=2$ のときの基本解は

$$E(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sqrt{t^2-|x|^2}}, & |x|<t, \\ 0, & t<|x|. \end{cases}$$

従って (7.1) の解 $u(t,x)$ は

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|y|<t}\frac{f(x+y)}{\sqrt{t^2-|y|^2}}dy\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<t}\frac{g(x+y)}{\sqrt{t^2-|y|^2}}dy \tag{7.7}$$

と書ける．

この方法はアダマールによるもので**変数低減法**と呼ばれる．$n \geq 4$ の場合は次のようになる．

定理 7.1.6 $n \geq 4$ の場合の基本解は

$$E(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2} K_n(|x|,t),$$

$$K_n(r,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{t^2}{r^2}-1\right)^{\frac{n-3}{2}}, & r<t, \\ 0, & r>t \end{cases}$$

で与えられる．

証明は長くなるので省略するが，例えば参考文献 [7], p. 165 にある．そこにある記述は単なる計算ではなしに球面平均の方法，アスガイルソンの平均値の定理等，深い話題につながっており一読に値する．

7.2 有限伝播性

前節で述べた基本解はすべて $|x| \leq t$ という範囲にのみ台を持っている．従って初期値 $f(x)$, $g(x)$ が $|x| \leq R$ という範囲に台を持っていれば時刻 t における解 $u(t,x)$ の台は $|x| \leq R+t$ という範囲に台を持つ．これは

$$E(t) * g = \int_{|y|\leq R} E(t,x-y)g(y)dy$$

において $|x| > R+t$ なら

$$|x-y| \geq |x| - |y| > R+t-|y| \geq R+t-R = t$$

となることから分かる．波動方程式は媒質の中の振動の伝わり方を記述する方程式であるが，このことは初期状態における媒質の擾乱は速度 1 で空間の中を伝わっていくことを意味している．この性質を**有限伝播性**と呼ぶ．

基本解の台が $|x| \leq t$ にのみ台を持っているということは (7.4) から直接示すこともできる．まず $\displaystyle\int_{S^{n-1}} e^{i\rho\omega\cdot x}d\omega$ は ρ と $|x|$ のみに依存するから

$$\varphi(\rho,r) = (2\pi)^{-n}\int_{S^{n-1}} e^{i\rho\omega\cdot x}d\omega, \quad r=|x|$$

とおこう．

$$\varphi(\rho,r) = \varphi(-\rho,r) \tag{7.8}$$

となることは $-\omega$ を変数にとって積分すれば分かる．このとき

$$E(t,x) = \int_0^\infty \sin(t\rho)\rho^{n-2}\varphi(\rho,r)d\rho \tag{7.9}$$

である．n が $n \geq 3$ の奇数であるとしよう．このとき (7.8) によって (7.9) は

$$E(t,x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(t\rho)\rho^{n-2}\varphi(\rho,r)d\rho$$
$$= \frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{it\rho} - e^{-it\rho}\right)\rho^{n-2}\varphi(\rho,r)d\rho$$

と書き換えられる．$\rho^{n-2}\varphi(\rho,r)$ は ρ の関数として $\boldsymbol{C}$ 全体に解析接続され

$$|z^{n-1}\varphi(z,r)| \leq C(1+|z|)^{n-2}e^{r|\mathrm{Im}\, z|}$$

と評価される．よってペーリー・ウィーナー・シュワルツの定理（定理 4.5.17）によって $E(t,x)$ の台は $r \leq t$ という範囲にある．n が偶数の場合には $n=2$ の場合と同様にアダマールの変数低減法を用いればよい．詳しい計算は省略する．

7.3 双曲型方程式

この節では $\mathcal{F}$ は t, x 両方の変数に関する次のようなフーリエ変換とする：

$$(\mathcal{F}f)(\tau,\xi) = (2\pi)^{-(n+1)/2}\int_{\boldsymbol{R}^{n+1}} e^{i(t\tau - x\cdot\xi)}f(t,x)dtdx.$$

まず $n=1$ の場合から考えよう．基本解を計算するための出発点として方程式

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)U(t,x) = \delta(t,x) \tag{7.10}$$

を考える．右辺は $\boldsymbol{R}^2$ の原点 $(0,0)$ に台を持つデルタ関数である．この方程式の 2 つの解 $U_+(t,x), U_-(t,x)$ をとって $U(t,x) = U_+(t,x) - U_-(t,x)$ を考えようというのがアイディアである．(7.10) の両辺をフーリエ変換すれば

$$(-\tau^2 + \xi^2)(\mathcal{F}U)(\tau,\xi) = (2\pi)^{-1}$$

となるから

$$U(t,x) = (2\pi)^{-2}\int_{\boldsymbol{R}^2} \frac{e^{i(-t\tau + x\xi)}}{\xi^2 - \tau^2}d\tau d\xi$$

として $U(t,x)$ を計算できるであろう．しかし右辺の被積分関数は特異点を持っているためこのままでは積分を計算できない．そこで

$$U_\pm(t,x) = (2\pi)^{-2}\int_{\boldsymbol{R}^2} \frac{e^{i(-t\tau + x\xi)}}{\xi^2 - (\tau \pm i0)^2}d\tau d\xi \tag{7.11}$$

を考える．ただし右辺は

$$\lim_{\epsilon\to 0}(2\pi)^{-2}\int_{\boldsymbol{R}^2} \frac{e^{i(-t\tau + x\xi)}}{\xi^2 - (\tau \pm i\epsilon)^2}d\tau d\xi$$

の意味である．このフーリエ変換を計算するために次の補題に注意しよう．証明は上（下）半平面の半円に沿って積分し，留数を計算すればよい．

補題 7.3.1 $a>0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x-b\mp i0}dx=\begin{cases}2\pi ie^{iab} & (-),\\ 0 & (+).\end{cases} \tag{7.12}$$

$a<0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x-b\mp i0}dx=\begin{cases}0 & (-),\\ -2\pi ie^{iab} & (+).\end{cases} \tag{7.13}$$

この補題と

$$\frac{1}{\xi^2-(\tau+i0)^2}=\frac{1}{2\xi}\left(\frac{1}{\tau+\xi+i0}-\frac{1}{\tau-\xi+i0}\right)$$

を使えば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it\tau}}{\xi^2-(\tau+i0)^2}d\tau=\begin{cases}2\pi\dfrac{\sin(t\xi)}{\xi} & (t>0),\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

である．よって

$$(2\pi)^{-2}\int_{\boldsymbol{R}^2}\frac{e^{i(-t\tau+x\xi)}}{\xi^2-(\tau+i0)^2}d\tau d\xi=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}\frac{\sin(t\xi)}{\xi}d\xi & (t>0),\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

となるが，右辺は $t>0$ のとき前節で求めた基本解であるから

$$U_+(t,x)=\begin{cases}E(t,x) & (t>0),\\ 0 & (t<0)\end{cases} \tag{7.14}$$

となる．同様にして

$$U_-(t,x)=\begin{cases}0 & (t>0),\\ E(-t,x) & (t<0)\end{cases} \tag{7.15}$$

が得られる．そこで

$$U(t,x)=U_+(t,x)-U_-(t,x) \tag{7.16}$$

とおくと，$\boldsymbol{R}^2$ において

$$(\partial_t^2-\Delta_x)U(t,x)=\delta(t,x)-\delta(t,x)=0$$

を満たし $t>0, t\to 0$ のとき

$$U(t,x)\to 0,\quad t>0,\quad \partial_t U(t,x)\to\delta(x)$$

であるから，$U(t,x)$ は基本解である．

結果的には前の方法と同じ結論が得られたが，この方法は次の意味で有用で

ある．前の方法では時間変数 t と空間変数 x を分離して扱っていた．しかし，例えば特殊相対性理論においては時空の変数は同等に扱われる．波動方程式はローレンツ変換に関して不変であり，よって波動方程式を解いて得られる結果もローレンツ変換に関して不変（または共変）となるはずである．このような状況を考えるには時空の変数を区別しない第 2 の方法が便利である．波動方程式を一般化した**双曲型方程式**を考える際にも第 2 の考え方が用いられる．例えば参考文献 [21] を見られたい．

7.4 波の伝播

通常，波といえば波の山や谷が進んで行く様子を思い浮かべる．この直観的な見方を前節で述べた基本解による解の公式から直接導くことはあまり易しくはない．この小節では漸近的な表示によって波の形を表そう．フーリエ変換はここで有効に働く．

まず波動方程式の解は一般に

$$u(t,x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i(x\cdot\xi - t|\xi|)}\hat{f}(\xi)d\xi + \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i(x\cdot\xi + t|\xi|)}\hat{g}(\xi)d\xi \tag{7.17}$$

という形に表されることに注意しよう．ここで $f, g \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ である．さらに $\hat{f}(\xi), \hat{g}(\xi) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ であり，ある $a > 0$ に対して $\hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi) = 0$, $|\xi| < a$, となるものとしよう．補題 6.4.7 により $c = (2\pi)^{(n-1)/2}e^{-(n-1)\pi i/4}$ とおけば

$$\begin{aligned}&\int_{S^{n-1}} e^{ik\omega\cdot x}\hat{f}(k\omega)d\omega \\ &= \frac{ce^{ikr}}{(kr)^{(n-1)/2}}\hat{f}(k\hat{x}) + \frac{\overline{c}e^{-ikr}}{(kr)^{(n-1)/2}}\hat{f}(-k\hat{x}) + O(r^{-(n+1)/2})\end{aligned}$$

$(r = |x| \to \infty,\ \hat{x} = x/r)$ という展開が成り立つ．これに k^{n-1} をかけて k で積分する．$\hat{g}(\xi)$ を含む項にも同じことをすると (7.17) は

$$u(t,x) = r^{-(n-1)/2}\big(a(r-t,\hat{x}) + b(r+t,\hat{x})\big) + O(r^{-(n+1)/2}), \quad r \to \infty$$

という t に関して一様な展開を持つ．特に $a(s,\hat{x}), b(s,\hat{x})$ が $\hat{x}$ によらない場合を考えそれらを $a(s), b(s)$ とおこう．初期値 $u(0,x)$, $\partial_t u(0,x)$ が球対称のときこの条件は満たされる．このとき $a(s)$, $b(s)$ が最大値を持つ s を s_a, s_b とすれば $a(r-t)$ は $r = t + s_a$ に最大値を持っている．これが波の山で時間とともに移動し，その高さは 2 次元以上では次第に減衰していく．$b(r+t)$ についても同様である．

一般に波の山や谷などの位相の等しい点をつないで得られる曲面を**波面**と呼んでいる．上で見たように波面は一定の速度で進んで行く．これが波動方程式の特徴である．しかし波面に関する別の見方もある．こちらの方がむしろ微分方程式論で伝統的に用いられてきた考え方である．波動方程式は媒質の振動が

伝わる様子を記述するものであった．そこで初期状態で媒質を急激に変化させよう．これは初期値として不連続あるいは微分不可能のような特異性のあるものを与えるということである．このとき解もある曲面に特異性を持ち，この曲面が時間とともに進行して行く．以下ではこの特異性を担う曲面を波面と呼ぶ．波面の形は初期値の特異性に依存する．その様子をいくつかの例で観察しよう．

(7.1) で $f(x)=0$ としたときの解を $u(t,x)$ とする．$g(x)\in\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ はコンパクト台を持つものとする．補題 5.2.7 (3) により

$$\mathrm{supp}\,\big(u(t,x)\big)\subset\mathrm{supp}\,\big(g(x)\big)+\{x\in\boldsymbol{R}^n\,;\,|x|\le t\} \tag{7.18}$$

となることにまず注意しよう．

例 7.4.1 例として (7.1) で $f(x)=0$, $g(x)$ にデルタ関数を与えたときの解を考えよう．その解は基本解であった．前節で見たように基本解は $|x|=t$ において特異性を持っている．

例 7.4.2 曲面上に特異性を持った初期値を考えよう．$\boldsymbol{R}^n$ において $F(x)=|x|-a$, $a>0$ とし $g(x)=\delta(F(x))$ とおく．これは $S=\{x\in\boldsymbol{R}^n\,;|x|=a\}$ に台を持つ超関数であり，そのフーリエ変換は (5.25) と例 4.4.4 によって

$$\hat{g}(\xi)=(2\pi)^{-n/2}a^{n-1}\int_{S^{n-1}}e^{-ia\omega\cdot\xi}d\omega$$

と書ける．$g(x)$ を初期値に持つ波動方程式に解 $u(t,x)$ は

$$u(t,x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{g}(\xi)d\xi$$

である．$\chi(\xi)=\chi(|\xi|)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ で $\chi(\xi)=0\ \ (|\xi|<1)$, $\chi(\xi)=1\ \ (|\xi|>2)$ を満たすものをとる．上の積分に $\chi(\xi)$ を挿んでも誤差は x に関して C^∞ である．補題 6.5.3 によって

$$\hat{g}(\xi)=\frac{a^{(n-1)/2}}{(2\pi)^{1/2}|\xi|^{(n-1)/2}}\left(e^{-i(a|\xi|-(n-1)\pi/4)}+e^{i(a|\xi|-(n-1)\pi/4)}\right)\\ +O(|\xi|^{-(n+1)/2})$$

$(|\xi|\to\infty)$ である．よって $g(x)$ を初期値に持つ波動方程式の解は

$$\begin{aligned}u(t,x)=&\int_{\boldsymbol{R}^n}\left(e^{i(x\cdot\xi-t|\xi|-a|\xi|)}+e^{i(x\cdot\xi-t|\xi|+a|\xi|)}\right)|\xi|^{(n-3)/2}\chi(\xi)d\xi\\ &-\int_{\boldsymbol{R}^n}\left(e^{i(x\cdot\xi+t|\xi|-a|\xi|)}+e^{i(x\cdot\xi+t|\xi|+a|\xi|)}\right)|\xi|^{(n-3)/2}\chi(\xi)d\xi+\cdots\end{aligned}$$

という形に書ける．ただし定数倍の違いは本質的でないので省略した．ここで $\cdots$ は最初の 2 項よりは弱い特異性を持っている．最初の項の特異性を計算する．$\xi=k\theta$, $k=|\xi|$, $\theta=\xi/k$ とおけば

$$(2\pi)^{-(n-1)/2}\int_{S^{n-1}}e^{ik\theta\cdot x}d\theta$$

$$= \frac{e^{i(kr-(n-1)\pi/4)}}{(kr)^{(n-1)/2}} + \frac{e^{-i(kr-(n-1)\pi/4)}}{(kr)^{(n-1)/2}} + O((kr)^{-(n+1)/2})$$

$(r = |x|)$ であるから上の積分は

$$u(t,x) = \sum_{\pm} \int_0^\infty e^{ik(\pm r \pm t \pm a)} k^{(n-3)/2} \chi(k) dk + \cdots$$

となる．この積分の特異性を調べるには補題 5.1.12 と類似の計算をする．$\psi(k) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ で $\psi(k) = 1$ $(|k| < 1)$, $\psi(k) = 0$ $(|k| > 2)$ を満たすものをとり，$\psi_\epsilon(k) = \psi(\epsilon k)$ とおく．

$$v_\epsilon(s) = \int_0^\infty e^{iks} k^{(n-1)/3} \psi_\epsilon(k) \chi(k) dk$$

とし，$v_0(s) = v(s)$ とおく．

$$(is)^{-1} \frac{d}{dk} e^{iks} = e^{iks}$$

を用いて部分積分すれば $s \neq 0$ のとき

$$v_\epsilon(s) = (-is)^{-N} \int_0^\infty e^{iks} \left(\frac{d}{dk}\right)^N \left(k^{(n-1)/3} \psi_\epsilon(k) \chi(k)\right) dk$$

であり，補題 5.1.10 から ϵ によらない定数 C_N が存在して

$$\left| \left(\frac{d}{dk}\right)^N \left(k^{(n-1)/3} \psi_\epsilon(k) \chi(k)\right) \right| \le C_N k^{(n-3)/2-N}$$

が成り立つ．N を大きくとって $\epsilon \to 0$ とすれば $v(s) \in C^\infty(\boldsymbol{R} \setminus \{0\})$ であることが分かる．よって $u(t,x)$ は $r = \pm(t \pm a)$ 以外のところで x に関して C^∞ である．例えば $0 < t < a$ という範囲では $u(t,x)$ の特異性は $|x| = t + a$,

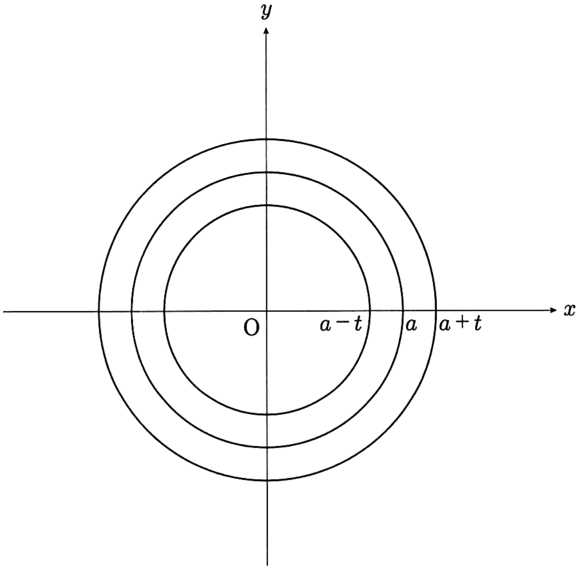


図 7.1　特異台の伝播 1.

$|x|=-t+a$ という 2 つの同心球上にある．これは解の特異性が $|x|=a$ から出発して球面を形成しながら外向き，内向きの 2 つの方向に進行していったことを意味する（図 7.1 を参照）．

例 7.4.3 $x=(x_1,x')\in \boldsymbol{R}^{n-1}$ とし $g(x)=\delta(x_1)\otimes\varphi(x')$, $\varphi(x')\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1})$, $\mathrm{supp}\,\varphi=\{|x'|\le a\}$ としてみよう．このとき

$$u(t,x)=(2\pi)^{-(n+1)/2}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{\varphi}(\xi')d\xi$$

となる．この積分を次のように評価する．まず $\chi(\xi)\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ で $\chi(\xi)=1$ $(|\xi|\le 1)$, $\chi(\xi)=0$ $(|\xi|>2)$ を満たすものをとる．特異性に関する限りでは上の積分に $1-\chi(\xi)$ を挿んだものを考えればよい．

$$\chi_\epsilon(\xi)=\chi(\epsilon\xi)\,(1-\chi(\xi))\,,$$
$$u_\epsilon(t,x)=(2\pi)^{-(n+1)/2}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\chi_\epsilon(\xi)\hat{\varphi}(\xi')d\xi$$

とおく．さらに $\delta>0$ を小さくとって $\rho(t)\in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ で $\rho(t)=1$ $(|t|<\delta/2)$, $\rho(t)=0$ $(|t|>\delta)$ を満たすものとをとって

$$\psi_1(\xi)=\rho(|\xi'|/|\xi|),\quad \psi_2(\xi)=1-\psi(\xi)$$

とおく．$u_\epsilon^{(1)}(t,x)$, $u_\epsilon^{(2)}(t,x)$ は $u_\epsilon(t,x)$ の積分に $\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\xi)$ を挿んだものとしよう．$u^{(1)}(t,x)$, $u^{(2)}(t,x)$ も同様に定義する．

$$\frac{|\xi'|}{|\xi|}>\frac{\delta}{2}\quad(\mathrm{supp}\,\psi_2(\xi)\ 上)$$

であり，$|\hat{\varphi}(\xi')|\le C_N(1+|\xi'|)^{-N}$, $\forall N$ であるから $|\psi_2(\xi)\hat{\varphi}(\xi')|\le C_N(1+|\xi|)^{-N}$, $\forall N>0$ が成り立つ．よって $u^{(2)}(t,x)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ である．

$u^{(1)}(t,x)$ を評価しよう．$t>0$ を固定する．

$$1\ge\frac{|\xi_1|}{|\xi|}>\sqrt{1-\delta^2}\quad(\mathrm{supp}\,\psi_1(\xi)\ 上),$$
$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}(x\cdot\xi-t|\xi|)=x_1-\frac{t\xi_1}{|\xi|}$$

の 2 つの事実に注目する．任意の $\delta_1>0$ に対して δ を小さくとると $|x\pm t|>\delta_1$ のとき

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi_1}(x\cdot\xi-t|\xi|)\right|>C>0\quad(\mathrm{supp}\,\psi_1(\xi)\ 上)$$

となる．そこで $L=-i(x_1-t\xi_1/|\xi|)^{-1}\partial/\partial\xi_1$ とおく．

$$Le^{i(x\cdot\xi-t|\xi|)}=e^{i(x\cdot\xi-t|\xi|)}$$

であるから $\sin(t|\xi|)=\left(e^{it|\xi|}-e^{-it|\xi|}\right)/(2i)$ と分解して部分積分することにより

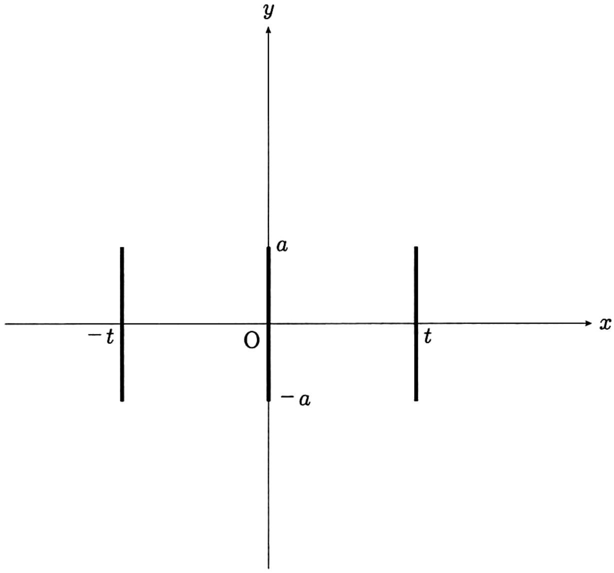


図 7.2 特異台の伝播 2.

$$u_\epsilon^{(1)}(t,x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ix\cdot\xi} b_N(t,x,\xi)d\xi,$$
$$|b_N(t,x,\xi)| \le C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad \forall N$$

となる．これより $u_1(t,x)$ は $|x_1 \pm t| > \delta_1$ で C^∞ である．$\delta_1 \to 0$ として $u_1(t,x)$ は $x_1 = \pm t$ 以外で C^∞ であることが分かる．従って $u(t,x)$ も同じ性質を持つ．一方 $\mathrm{supp}\,\big(g(x)\big) = \{0\} \times \{|x'| < a\}$ であるから (7.18) より $u(t,x)$ の台は $\{0\} \times \{|x'| < a\} + \{|x| \le t\}$ の中にあり，従ってここ以外では C^∞ である．よって $u(t,x)$ の特異性は 2 つの円盤 $\{\pm t\} \times \{|x'| \le a\}$ となって進行する (図 7.2 を参照)．

7.5 特異台と波面集合

この節の標題にある 2 つの概念は超関数の精密な性質を考える際に重要な鍵になるものである．$x_0 \in \boldsymbol{R}^n$, $a > 0$ に対して $B_a(x_0) = \{x \in \boldsymbol{R}^n\,;\, |x - x_0| < a\}$ とおく．$\mathcal{F}$ はフーリエ変換を意味する．

7.5.1 特異台

定義 7.5.1 $u \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ が $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ において C^∞ とは，ある $\epsilon > 0$ と $f(x) \in C^\infty(B_\epsilon(x_0))$ が存在し

$$\langle u, \varphi\rangle = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(B_\epsilon(x_0)) \tag{7.19}$$

が成り立つことである．

補題 7.5.2 $u \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ に対して次の 3 つの主張は同値である．

(1) u は $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ において C^∞ である．

(2) $\chi(x_0) \neq 0$ である $\chi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ が存在し $\chi(x)u(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$.

(3) $\chi(x_0) \neq 0$ である $\chi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ が存在し

$$|\mathcal{F}\big(\chi u\big)(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad \forall N > 0.$$

証明 (1) $\Longrightarrow$ (2) を示す．(7.19) を満たす $f(x)$ と $\epsilon > 0$ をとる．$\chi(x) \in C_0^\infty(B_\epsilon(x_0))$ を $\chi(x) = 1,\ x \in B_{\epsilon/2}(x_0)$ を満たすようにとれば $\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\langle \chi(x)u(x), \varphi(x) \rangle = \langle u(x), \chi(x)\varphi(x) \rangle = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\chi(x)\varphi(x)dx$$

であるから $\chi(x)u(x) = \chi(x)f(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ である．(2) $\Longrightarrow$ (1) は明らかである．(2) $\Longleftrightarrow$ (3) も明らかである．□

定義 7.5.3 $u \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ の**特異台** (singular support)，$\operatorname{sing\,supp}(u)$ とは

$$u \text{ が } x_0 \text{ で } C^\infty \Longleftrightarrow x_0 \notin \operatorname{sing\,supp}(u)$$

で定義される集合である．

例 7.5.4 (1) $\operatorname{sing\,supp}(\delta) = \{0\}$.

(2) $\operatorname{sing\,supp}\Big(\dfrac{1}{|x|^2 - \lambda \mp i0}\Big) = \{x\,;\,|x|^2 = \lambda\},\ \lambda > 0.$

7.5.2 波面集合

波面集合とは特異台にさらに微分可能でない方向まで加えた概念である．$\xi_0 \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ と $0 < \delta < 1$ に対して

$$\varGamma(\xi_0, \delta) = \left\{\xi \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}\,;\,\left|\frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\xi_0}{|\xi_0|}\right| < \delta\right\} \tag{7.20}$$

とおく．これは錐状領域，即ち

$$\xi \in \varGamma(\xi_0, \delta) \Longrightarrow t\xi \in \varGamma(\xi_0, \delta), \quad \forall t > 0$$

が成り立つ．$u \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ の**波面集合** (wave front set)，$WF(u)$ を次のように定義する．

定義 7.5.5 $(x_0, \xi_0) \in \boldsymbol{R}^n \times (\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ が $WF(u)$ に属さないとは次を満たす実数値関数 $\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ と定数 $0 < \delta < 1$ が存在することである．$\varphi(x_0) \neq 0$，かつ任意の $N > 0$ に対して定数 $C_N > 0$ が存在し

$$|\mathcal{F}(\varphi u)(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad \forall \xi \in \varGamma(\xi_0, \delta).$$

この定義により $WF(u)^c$ は開集合であるから，波面集合は $\boldsymbol{R}^n \times (\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\})$ の閉集合である．また

$$(x_0, \xi_0) \in WF(u) \Longrightarrow (x_0, t\xi_0) \in WF(u), \quad \forall t > 0 \tag{7.21}$$

が成り立つ．

補題 7.5.6　$a(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, $u \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ に対し $WF(au) \subset WF(u)$.

証明　$(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ とすれば定義 7.5.5 に述べた $\varphi(x)$, δ が存在する．$v = \varphi u$ とおき $\mathcal{F}(\varphi a u) = I_1 + I_2$,

$$I_1(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\Gamma(\xi_0, \delta)} \hat{a}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta) d\eta,$$

$$I_2(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\Gamma(\xi_0, \delta)^c} \hat{a}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta) d\eta$$

と分解する．三角不等式から得られる不等式

$$(1 + |\xi|)^N \leq (1 + |\xi - \eta|)^N (1 + |\eta|)^N$$

によって

$$(1 + |\xi - \eta|)^{-N} \leq (1 + |\xi|)^{-N} (1 + |\eta|)^N$$

であるから $\xi \in \boldsymbol{R}^n$, $\eta \in \Gamma(\xi_0, \delta)$ に対して

$$\left| \hat{a}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta) \right| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N} (1 + |\eta|)^{-N}$$

が得られる．ここで u の波面集合の定義より $\hat{v}(\eta)$ は $\Gamma(\xi_0, \delta)$ において急減少することを用いた．よって

$$|I_1(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N}, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n, \quad \forall N \tag{7.22}$$

となる．

$0 < \delta' < \delta$ のとき

$$\left| \frac{\eta}{|\eta|} - \frac{\xi}{|\xi|} \right| \geq \delta - \delta' > 0, \quad \xi \in \Gamma(\xi_0, \delta'), \quad \eta \notin \Gamma(\xi_0, \delta)$$

となる．両辺を 2 乗して

$$-2 \frac{\eta \cdot \xi}{|\eta| \cdot |\xi|} > (\delta - \delta')^2 - 2 = -2c, \quad c = 1 - \frac{(\delta - \delta')^2}{2}$$

であるから

$$|\eta - \xi|^2 > |\eta|^2 + |\xi|^2 - 2c|\eta| \cdot |\xi| \geq (1 - c)(|\eta|^2 + |\xi|^2)$$

である．従って

$$|\hat{a}(\xi - \eta)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N} (1 + |\eta|)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma(\xi_0, \delta'), \quad \eta \notin \Gamma(\xi_0, \delta)$$

である．v はコンパクト台を持つ超関数であるから定理 4.5.17 によりある $m > 0$ に対して

$$|\hat{v}(\eta)| \leq C(1+|\eta|)^m, \quad \forall \eta \in \boldsymbol{R}^n$$

が成り立つ．以上をまとめると $\xi \in \Gamma(\xi_0, \delta')$, $\eta \notin \Gamma(\xi_0, \delta)$ に対して

$$|\hat{a}(\xi-\eta)\hat{v}(\eta)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}(1+|\eta|)^{-N}$$

が成り立つから

$$|I_2(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad \forall \xi \in \Gamma(\xi_0, \delta'), \quad \forall N \tag{7.23}$$

である．(7.22), (7.23) により $(x_0, \xi_0) \notin WF(au)$ である．□

補題 7.5.7 $\pi : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \ni (x, \xi) \to x \in \boldsymbol{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ とすれば

$$\pi(WF(u)) = \operatorname{sing\,supp}(u).$$

証明 $x_0 \notin \pi(WF(u))$ とすると，任意の $\xi_0 \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ に対して $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ だから $\varphi_{\xi_0}(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ と $0 < \delta_{\xi_0} < 1$ が存在し，$\varphi_{\xi_0}(x_0) \neq 0$, かつ

$$|\mathcal{F}(\varphi_{\xi_0} u)(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad \forall N, \quad \forall \xi \in \Gamma(\xi_0, \delta_{\xi_0}).$$

$C(\xi_0) = \Gamma(\xi_0, \delta_{\xi_0}) \cap S^{n-1}$ とおくと $S^{n-1} = \bigcup_{\xi_0 \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}} C(\xi_0)$ で S^{n-1} はコンパクトだから $S^{n-1} = \bigcup_{j=1}^{N} C(\xi^{(j)})$ となる $\xi^{(j)}$, $j = 1, \cdots, N$ が存在する．$\Gamma_j = \Gamma(\xi^{(j)}, \delta_{\xi^{(j)}})$, $\varphi_j(x) = \varphi_{\xi^{(j)}}(x)$ とおく．$\varphi(x) = \prod_{j=1}^{N} \varphi_j(x)$ とおけば補題 7.5.6 の証明と同様にして

$$|\mathcal{F}(\varphi u)(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad \forall N, \quad \forall \xi \in \Gamma'_j, \quad j = 1, \cdots, N$$

が成り立つ．ただし Γ'_j は Γ_j を少し小さくした錐状領域でかつ $S^{n-1} = \bigcup_{j=1}^{N} (\Gamma'_j \cap S^{n-1})$ を満たす．これより

$$|\mathcal{F}(\varphi u)(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad \forall N, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n$$

であるから $x_0 \notin \operatorname{sing\,supp}(u)$ である．

逆に $x_0 \notin \operatorname{sing\,supp}(u)$ なら $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ が存在し，$\varphi(x_0) \neq 0$ かつ

$$|\mathcal{F}(\varphi u)(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad \forall N, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n$$

が成り立つ．任意の $\xi_0 \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ と $0 < \delta < 1$ を固定すると上の不等式は $\xi \in \Gamma(\xi_0, \delta)$ に対して成り立つから $x_0 \notin \pi(WF(u))$ である．□

例 7.5.8 $WF(\delta) = \{(0, \xi)\,;\, \xi \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}\}$.

$\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, $\varphi(0) \neq 0$ のとき $\mathcal{F}(\varphi\delta) = (2\pi)^{-n/2}\varphi(0)$ は ξ のどのような方向に対しても減少しないからこの例のようになる.

例 7.5.9 $WF((x \pm i0)^{-1}) = \{(0, \pm\xi)\,;\, \xi > 0\}$.

実際, 補題 3.6.7 により

$$\theta_\pm(\xi, \lambda) = (2\pi)^{-1/2} e^{\pm(\lambda+1)\pi i/2} \mathcal{F}((x \pm i0)^{-(\lambda+1)})$$

である. よって $C_\pm$ を定数として $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ に対して

$$\mathcal{F}\big(\varphi(x)(x \pm i0)^{-1}\big)(\xi) = C_\pm \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\eta)\theta_\pm(\xi - \eta, 0)d\eta$$
$$= \begin{cases} C_+ \displaystyle\int_{-\infty}^{\xi} \hat{\varphi}(\eta)d\eta \\ C_- \displaystyle\int_{\xi}^{\infty} \hat{\varphi}(\eta)d\eta \end{cases}$$

であり, さらに

$$\varphi(0) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\eta)d\eta$$

である. 従って $\varphi(0) \neq 0$ のとき $\mathcal{F}\big(\varphi(x)(x \pm i0)^{-1}\big)(\xi)$ は, $\xi \to \mp\infty$ のときは急減少し, $\xi \to \pm\infty$ のときは急減少しない.

例 7.5.10 曲面 S が $f(x) = 0$ で定義されるとき, $N(x) = \nabla f(x)$, $x \in S$ とおけば

$$WF(\delta(f(x))) = \{(x, \pm tN(x))\,;\, x \in S,\ t > 0\}$$

$u(x) = \delta(f(x))$ とおけば $\operatorname{sing\,supp} u(x) = S$ であることは直ちに分かる. $x_0 \in S$, $\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ で $\varphi(x_0) \neq 0$ とする. (5.25) により

$$\mathcal{F}(\varphi u)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_S e^{-ix\cdot\xi} \frac{\varphi(x)}{|\nabla f(x)|} dS \tag{7.24}$$

である. $\xi_0 \in \boldsymbol{R}^n \backslash \{0\}$ が $N(x_0)$ に平行でないとする. このとき φ の台を十分小さくとれば $\operatorname{supp}\varphi$ 上でも $\xi_0 \in \boldsymbol{R}^n \backslash \{0\}$ が $N(x_0)$ に平行でない. よって (6.22) により (7.24) は $|\xi| \to \infty$ のとき急減少する. これより $(x_0, \xi_0) \notin WF(u(x))$ であるから

$$WF(u(x)) \subset \{(x, \pm tN(x))\,;\, x \in S,\ t > 0\}$$

である. 逆を示すために次の事実に注目しよう: $g(x) \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ が実数値であるための必要十分条件は

$$\overline{\hat{g}(\xi)} = \hat{g}(-\xi), \quad \forall\xi \in \boldsymbol{R}^n$$

が成り立つことである．これを一般化して示す．

$\mathcal{D}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^n)$ を，実数値をとる $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 全体とする．$T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ が実数値であるとは

$$\langle T, \varphi \rangle \in \boldsymbol{R}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^n) \tag{7.25}$$

が成り立つときをいう．$\varphi \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ を $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^n)$ と分ければ (7.25) が成り立つとき

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi_1 + i\varphi_2 \rangle &= \langle T, \varphi_1 \rangle + i\langle T, \varphi_2 \rangle = \overline{\langle T, \varphi_1 \rangle} + i\overline{\langle T, \varphi_2 \rangle} \\ &= \overline{\langle T, \varphi_1 - i\varphi_2 \rangle}\end{aligned}$$

である．逆も容易に確かめられるから $T \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ が実数値であることを

$$\langle T, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \overline{\varphi} \rangle}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n) \tag{7.26}$$

と言い換えてよい．

補題 7.5.11 $T \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ が実数値であることは

$$\overline{\langle \hat{T}(\xi), \varphi(\xi) \rangle} = \langle \hat{T}(-\xi), \overline{\varphi(\xi)} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n) \tag{7.27}$$

と同値である．

証明 (7.26) で $\varphi = \hat{\psi}$ とおけば $\overline{\varphi}(x) = (\mathcal{F}\overline{\psi}(-\xi))(x)$ であるから

$$\begin{aligned}\langle \hat{T}, \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \overline{\varphi} \rangle} &= \overline{\langle T, (\mathcal{F}\overline{\psi}(-\xi))(x) \rangle} \\ &= \overline{\langle \hat{T}(\xi), \overline{\psi}(-\xi) \rangle} = \overline{\langle \hat{T}(-\xi), \overline{\psi}(\xi) \rangle}\end{aligned}$$

が得られる．逆も同様にして示される． □

$u(x) = \delta(f(x))$ に戻る．$x_0 \in S$ に対して $\xi_0 = tN(x_0)$, $t > 0$ とおく．$(x_0, \xi_0) \notin WF(u(x))$ とすれば，実数値の $\varphi(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ で $\varphi(x_0) \neq 0$ を満たすものが存在し，$v(x) = \varphi(x)u(x)$ のフーリエ変換は ξ_0 方向に急減少する．$v(x)$ はコンパクト台を持ち実数値をとる超関数だから補題 7.5.11 により $\hat{v}(\xi) = \overline{\hat{v}(-\xi)}$ である．よって $\hat{v}(\xi)$ は $-\xi_0$ 方向にも急減少する．$\hat{v}(\xi)$ は $\pm\xi_0$ 方向以外では急減少することが示されているから $v(x)$ が x_0 の近傍で C^∞ であることになり矛盾である．よって $(x_0, \xi_0) \in WF(u(x))$ である．同様に $(x_0, -\xi_0) \in WF(u(x))$ である． □

例 7.5.12 曲面 S が $f(x) = 0$ で定義されるとき，$N(x) = \nabla f(x)$, $x \in S$ とおけば

$$WF((f(x) + i0)^{-1}) = \{(x, tN(x))\,;\, x \in S,\ t > 0\},$$

$u(x) = (f(x)+i0)^{-1}$ とおけば $\mathrm{sing\,supp}\,(u(x)) = S$ である．$\epsilon > 0$ のとき

$$(f(x)+i\epsilon)^{-1} = -i\int_0^\infty e^{it(f(x)+i\epsilon)}dt$$

となることに注意する．$u_\epsilon(x) = (f(x)+i\epsilon)^{-1}$ とおく．$x_0 \in S$ と $\varphi(x_0) \neq 0$ を満たす $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ をとり $v_\epsilon(x) = \varphi(x)u_\epsilon(x)$ とおけば

$$\hat{v}_\epsilon(\xi) = -i(2\pi)^{-n/2}\int_0^\infty\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-i(x\cdot\xi - tf(x)) - \epsilon t}\varphi(x)dxdt$$

と書ける．ξ_0 と $\nabla f(x_0)$ が同じ方向を持っていないとき $\mathrm{supp}\,\varphi(x)$ を十分小さくとれば，定数 $C > 0$ が存在し $\mathrm{supp}\,\varphi$ 上

$$|\xi_0 - t\nabla f(x)| \geq C(|\xi_0| + t), \forall t > 0$$

が成り立つ．そこで

$$i\frac{(\xi_0 - t\nabla f(x))}{|\xi - t\nabla f(x)|}\cdot\nabla_x e^{-i(x_0\cdot\xi - f(x))} = e^{-i(x_0\cdot\xi - f(x))}$$

を用いて部分積分すれば

$$\hat{v}_\epsilon(\xi_0) = \int_0^\infty\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-i(x_0\cdot\xi_0 - tf(x)) - \epsilon t}a_N(x,\xi_0,t)dxdt.$$

ただし $a_N(x,\xi_0,t)$ は x に関してはコンパクトな台を持ち

$$|a_N(x,\xi_0,t)| \leq C_N(1+|\xi_0|+t)^{-N}$$

と評価される．$\epsilon \to 0$ として $|\hat{v}(\xi_0)| \leq C_N(1+|\xi_0|)^{-N}$, $\forall N > 0$ が成り立つ．この不等式は ξ_0 に十分近い ξ に対しても成り立つから $(x_0, \xi_0) \notin WF(u(x))$ である．よって $WF(u(x)) \subset \{(x, tN(x))\,;\, x \in S,\ t > 0\}$ である．もし $x_0 \in S$ に対して $(x_0, tN(x_0)) \notin WF(u(x))$ なら $x_0 \notin \mathrm{sing\,supp}\,(u)$ となり矛盾である．よって $WF(u(x)) = \{(x, tN(x))\,;\, x \in S,\ t > 0\}$ である．

7.5.3 特異性の伝播

波動方程式の初期値が特異性を持てば解も特異性を持つ．波面集合を見ることによって特異性の伝播の様子を詳しく調べることができる．$\boldsymbol{R}^n$ で定義された微分作用素

$$P(x,\partial_x) = \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha$$

を考えよう．$a_\alpha(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ かつ $\partial_x^\beta a_\alpha(x) \in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, $\forall\beta$ であり，定数 $C > 0$ が存在して

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geq C|\xi|^2, \quad \forall\xi \in \boldsymbol{R}^n$$

が成り立つとする．次の波動方程式を考えよう．

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - P(x,\partial_x)\right)u = 0, & t > 0, \\ u = 0, \quad \partial_t u = g, & t = 0. \end{cases} \tag{7.28}$$

$P_0(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ とおく．この偏微分方程式に付随して**陪特性曲線** (bicharacteristics) の方程式と呼ばれる次の常微分方程式を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt} = \dfrac{\partial P_0(x,\xi)}{\partial \xi_j} & (j = 1, \cdots, n), \\ \dfrac{d\xi_j}{dt} = -\dfrac{\partial P_0(x,\xi)}{\partial x_j} & (j = 1, \cdots, n). \end{cases} \tag{7.29}$$

$(x_0,\ \xi_0)$ を初期値とするこの方程式の解を $x(t;\ x_0,\ \xi_0)$, $\xi(t;\ x_0,\ \xi_0)$ と書く．このとき次の定理が成り立つ．

定理 7.5.13 (7.28) の解を $u(t,x)$ とする．$(x_0,\xi_0) \in WF(g(x))$ なら $(x(t;x_0,\xi_0),\xi(t;x_0,\xi_0)) \in WF(u(t,x))$ である．

即ち初期値の特異性は陪特性曲線に沿って伝播して行く．これは波の伝わる原理をフーリエ変換の立場から深く掘り下げた定理である．この定理の証明は偏微分方程式の専門書の中で探してほしい．前節の例 7.4.2, 7.4.3 は上の定理の特別な場合を述べたものである．

波動方程式という基本的な方程式に限定しても障害物に波が反射する場合，あるいは非線形波動の場合等，波の伝播に関しては未解決の事柄が多くあるように思われる．超関数とフーリエ変換は将来にわたっても偏微分方程式研究の基本手段として活用されていくであろう．

補遺

A.1　ヘルダー・ミンコフスキーの不等式

以下では積分 $\int \cdots dx$ は $\int_{\boldsymbol{R}^1} \cdots dx$ の意味である．次の不等式はヘルダー (Hölder) の不等式と呼ばれる．簡単のために $\boldsymbol{R}^1$ 上の関数に対して述べるが一般の測度空間においても同様である．

定理 A.1.1　$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q \geq 1$, $f(x) \in L^p$, $g(x) \in L^q$ のとき $f(x)g(x) \in L^1$ であり

$$\int \bigl|f(x)g(x)\bigr|dx \leq \left(\int |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int |g(x)|^q dx\right)^{1/q} \tag{A.1}$$

が成り立つ．これは次のようにも書ける．

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{A.2}$$

証明　$p,q>1$ の場合を示す．他の場合は演習問題とする．$x \geq 1$, $0<\gamma<1$ のとき $x^\gamma - 1 \leq \gamma(x-1)$ となることは簡単に分かる．$a \geq b > 0$ のとき，$x = a/b$, $\gamma = \alpha, 1-\gamma = \beta$ とおけば $a^\alpha b^\beta \leq a\alpha + b\beta$ である．対称性からこの不等式は $0 < a \leq b$ のときも成り立つ．$F(x), G(x) \geq 0$ とし $\alpha = 1/p$, $\beta = 1/q$, $a = F(x)\Big/\int F(t)dt$, $b = G(x)\Big/\int G(t)dt$ とおき x に関して積分すれば

$$\int \left(\frac{F(x)}{\int F(t)dt}\right)^\alpha \left(\frac{G(x)}{\int G(t)dt}\right)^\beta dx$$

$$\leq \int \left(\frac{\alpha F(x)}{\int F(t)dt} + \frac{\beta G(x)}{\int G(t)dt}\right) dx = \alpha + \beta$$

であるから

$$\int F(x)^\alpha G(x)^\beta dx \le \left(\int F(x)dx\right)^\alpha \left(\int G(x)dx\right)^\beta$$

となる．$\alpha = 1/p$, $\beta = 1/q$, $F(x) = |f(x)|^p$, $G(x) = |g(x)|^q$ とおけば (A.1) が示される． □

定理 A.1.1 で $p = q = 2$ の場合がコーシー・シュワルツ (Cauchy-Schwarz) の不等式である．次の不等式はミンコフスキー (Minkowski) の不等式と呼ばれる．

定理 A.1.2 $f(x), g(x) \in L^p$ のとき $f(x) + g(x) \in L^p$ で

$$\left(\int |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{1/p} \le \left(\int |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int |g(x)|^p dx\right)^{1/p}. \tag{A.3}$$

これは次のようにも書ける．

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{A.4}$$

証明 ヘルダーの不等式により

$$\begin{aligned}\int |f+g|^p dx &\le \int |f| \cdot |f+g|^{p-1} dx + \int |g| \cdot |f+g|^{p-1} dx \\ &\le \left(\int |f|^p dx\right)^{1/p} \left(\int |f+g|^p dx\right)^{1/q} \\ &\quad + \left(\int |g|^p dx\right)^{1/p} \left(\int |f+g|^p dx\right)^{1/q}\end{aligned}$$

であるから両辺を $\left(\int |f+g|^p dx\right)^{1/q}$ でわればよい． □

級数の場合には上の不等式は次のようになる．証明は積分の場合と同様にしてなされる．測度の一般論に慣れている人には，級数は積分の特殊な場合であることを思い出すことにより，定理 A.1.3 は定理 A.1.1, A.1.2 の特別な場合であることが分かるはずである．

定理 A.1.3 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $p, q \ge 1$ のとき

$$\sum_n |a_n b_n| \le \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_n |b_n|^p\right)^{1/q}, \tag{A.5}$$

$$\left(\sum_n |a_n + b_n|\right)^{1/p} \le \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_n |b_n|^p\right)^{1/p}. \tag{A.6}$$

A.2 フリードリックスの軟化子

まず無限回微分可能で有界な台を持つ関数を構成しよう．

補題 A.2.1 $\varphi(t) = 0\ (t \le 0)$, $\varphi(t) = e^{-1/t}\ (t > 0)$ で定義された $\varphi(t)$ は $\boldsymbol{R}$ 上で無限回微分可能である．

証明 $\varphi(t)$ は $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ で無限回微分可能である．帰納法により $n \ge 1$ のとき

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n e^{-1/t} = t^{-2n} P_n(t) e^{-1/t},$$

ただし $P_n(t)$ は t の $n-1$ 次多項式となることが分かる．これより $\varphi^{(n)}(t) \to 0$ $(t \to 0,\ t \ne 0)$ となる．$\varphi(t)$ が n 回連続的微分可能で $\varphi^{(n)}(0) = 0$ であることを帰納法で示す．$n = 0$ のときは正しい．n で正しいとして $t \ne 0$ のとき

$$\frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi^{(n)}(s)ds$$

となるから $t \to 0$ として $\varphi^{(n+1)}(0) = 0$ が分かる． □

この補題より $x \in \boldsymbol{R}^n$ として $\varphi(1 - |x|^2)$ は $\boldsymbol{R}^n$ 上で無限回微分可能であり，$\varphi(x) = 0\ (|x| > 1)$ となることが分かる．

$R > 0$ に対し $B_R = \{x \in \boldsymbol{R}^n; |x| \le R\}$ とおく．$\rho(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ で

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \rho(x)dx = 1, \tag{A.7}$$

$$\rho(x) \ge 0, \quad \operatorname{supp}\rho \subset B_1 \tag{A.8}$$

を満たすものをとる．例えば補題 A.2.1 の中の $\varphi(t)$ に対して $\rho(x) = C\varphi(1 - |x|^2)$，ただし定数 C は (A.7) が成り立つようにとる．

$$\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad \epsilon > 0 \tag{A.9}$$

とおく．(A.7) より

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \rho_\epsilon(x)dx = 1 \tag{A.10}$$

となる．$1 \le p < \infty$ とし $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ に対して合成積

$$(\rho_\epsilon * f)(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} \rho_\epsilon(x - y) f(y) dy \tag{A.11}$$

を考えよう．作用素：$f \to \rho_\epsilon * f$ をフリードリックス (Friedrichs) の軟化子 (mollifier) と呼ぶ．この言葉の由来は次の補題の (3) による．

補題 A.2.2 (1) $\|\rho_\epsilon * f\|_p \le \|f\|_p$.

(2) $\operatorname{supp} f \subset B_R$ なら $\operatorname{supp}\rho_\epsilon * f \subset B_{R+\epsilon}$.

(3) $\rho_\epsilon * f \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$.

(4) $\epsilon \to 0$ のとき $\|\rho_\epsilon * f - f\|_p \to 0$.

(5) $f \in C(\boldsymbol{R}^n)$ なら $\epsilon \to 0$ のとき $\rho_\epsilon * f \to f$. 収束は任意のコンパクト集合上で一様である.

証明 (1) $p > 1$ の場合を考える. $p^{-1} + q^{-1} = 1$ となる q をとれば

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \rho_\epsilon(x-y)|f(y)|dy = \int_{\boldsymbol{R}^n} \rho_\epsilon(x-y)^{1/q} \rho_\epsilon(x-y)^{1/p}|f(y)|dy$$

の右辺にヘルダーの不等式を用いて

$$\left(\int_{\boldsymbol{R}^n} \rho_\epsilon(x-y)|f(y)|dy \right)^p \le \int_{\boldsymbol{R}^n} \rho_\epsilon(x-y)|f(y)|^p dy$$

が得られる. ただしここで (A.10) を使った. $p = 1$ のときはこの式は明らかである. この両辺を x で積分すれば (1) が得られる. (A.8), (A.9) により $|x| > \epsilon$ なら $\rho_\epsilon(x) = 0$ である. よって $|x| > R + \epsilon$, $|y| \le R$ なら $|x - y| > \epsilon$ であるから $\rho_\epsilon(x-y) = 0$ である. そこで (A.11) を見れば (2) が分かる. ϵ を固定したとき $\rho_\epsilon(x-y)$ はそのすべての導関数が有界である. そこで定理 1.2.5 を用いて (3) が分かる. (4) を示そう. (A.10) により

$$(\rho_\epsilon * f)(x) - f(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} \rho_\epsilon(y) \left(f(x-y) - f(x) \right) dy$$

となる. $p > 1$ のときには $p^{-1} + q^{-1} = 1$ となる q を用いて $\rho_\epsilon(y) = \rho_\epsilon(y)^{1/q} \rho_\epsilon(y)^{1/p}$ としてヘルダーの不等式を用いることにより

$$\left| \int_{\boldsymbol{R}^n} \rho_\epsilon(y) \left(f(x-y) - f(x) \right) dy \right|^p \le \int_{\boldsymbol{R}^n} \rho_\epsilon(y) |f(x-y) - f(y)|^p dy$$

となる. $p = 1$ の場合には直ちに従う. この式の両辺を x で積分しフビニの定理を用いれば

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} |\rho_\epsilon * f(x) - f(x)|^p dx \le \int_{|y| \le \epsilon} \int_{\boldsymbol{R}^n} \rho_\epsilon(y) |f(x-y) - f(y)|^p dx dy$$

となる. 定理 1.1.5 により任意の $\eta > 0$ に対してある $\epsilon > 0$ が存在し

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} |f(x-y) - f(y)|^p dx < \eta \quad \text{if} \quad |y| < \epsilon$$

である. そこで $|y| < \epsilon$ のとき

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} |\rho_\epsilon * f(x) - f(x)|^p dx \le \eta \int_{|y| \le \epsilon} \rho_\epsilon(y) dy = \eta$$

であるから (4) が従う. (5) の証明も

$$|\rho_\epsilon * f(x) - f(x)| \le \int_{|y| < \epsilon} \rho_\epsilon(y) dy \times \sup_y |\varphi(x-y) - \varphi(x)| \qquad \text{(A.12)}$$

として上と同様に行えばよい. □

定理 A.2.3 $1 \le p < \infty$ のとき $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ は $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ の中で稠密である.

証明　$f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ と $\eta > 0$ をとる．$\chi_R(x)$ を B_R の特性関数とすれば $R > 0$ を十分大きくとることにより $\|f - \chi_R f\|_p < \eta$ である．$\varphi_{\epsilon,R}(x) = \rho_\epsilon * (\chi_R f)(x)$ とおき補題 A.2.2 (4) を用いれば ϵ を十分小さくとることにより $\|\chi_R f - \varphi_{\epsilon,R}\|_p < \eta$ である．補題 A.2.2 (2)，(3) により $\varphi_{\epsilon,R} \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ であり，$\|\varphi_{\epsilon,R} - f\|_p < 2\eta$ であるから定理が示された．□

A.3　ヒルベルト空間

一般に複素ベクトル空間 $\mathcal{H}$ に次の 3 つの性質を持つ $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ から $\boldsymbol{C}$ への写像 (,) が与えられたとき，それを内積 (inner product) という．

$$(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h), \quad \forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{C}. \tag{A.13}$$

$$(f,g) = \overline{(g,f)}. \tag{A.14}$$

$$(f,f) \geq 0, \quad (f,f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0. \tag{A.15}$$

$\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ とおけば，内積は次のコーシー・シュワルツ (Cauchy-Schwarz) の不等式を満たす．

$$|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|, \quad \forall f, g \in \mathcal{H} \tag{A.16}$$

これを証明しよう．$(f,g) \neq 0$ の場合を考えればよい．$e^{i\theta} = (f,g)/|(f,g)|$ とおくと，任意の実数 λ に対して

$$0 \leq (e^{-i\theta} f + \lambda g, e^{-i\theta} f + \lambda g) = \lambda^2 (g,g) + 2\lambda|(f,g)| + (f,f)$$

である．よって判別式をとれば (A.16) が得られる．これから次の三角不等式が従う．

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \tag{A.17}$$

これは (A.16) を用いて次のようにして示される．

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= (f+g, f+g) = (f,f) + 2\mathrm{Re}(f,g) + (g,g) \\ &\leq (f,f) + 2\|f\|\|g\| + (g,g) = (\|f\| + \|g\|)^2.\end{aligned}$$

2 点 f, g の間の距離を $\|f - g\|$ で定義する．$\mathcal{H}$ はこの距離に関して完備であるときヒルベルト (Hilbert) 空間と呼ばれる．すなわち，コーシー列 $\|f_n - f_m\| \to 0\ (m, n \to \infty)$ が与えられたとき，$f \in \mathcal{H}$ が存在し $\|f_n - f\| \to 0$ となるときである．Ω を $\boldsymbol{R}^n$ の領域とするとき $L^2(\Omega)$ は

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx$$

を内積としてヒルベルト空間である．

S がヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間であるとは S が $\mathcal{H}$ のベクトル部分空間であって，$f_n \in S$, $f \in \mathcal{H}$ が $\|f_n - f\| \to 0$ を満たすとき $f \in S$ となることである．S の直交補空間は

$$S^{\perp} = \{f \in \mathcal{H};\, (f, g) = 0, \quad \forall g \in S\}$$

によって定義される．このとき $\mathcal{H}$ は S と $S^{\perp}$ の直和になる:

$$\mathcal{H} = S \oplus S^{\perp}.$$

即ち S と $S^{\perp}$ の共通部分は 0 のみであり，$\mathcal{H}$ のすべての元は S と $S^{\perp}$ の元の 1 次結合で表される．これは直交分解と呼ばれ，重要である．

$\mathcal{H}$ の点列 f_n が f に強収束するとは

$$\|f_n - f\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となることである．f_n が f に弱収束するとは

$$(f_n, g) \to (f, g), \quad n \to \infty, \quad \forall g \in \mathcal{H}$$

となることである．f_n が f に強収束すれば f に弱収束する．それはコーシー・シュワルツの不等式より

$$|(f_n - f, g)| \leq \|f_n - f\| \|g\| \to 0$$

となるからである．

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ から $\boldsymbol{C}$ への線形写像（通常は線形汎関数という）が有界とはある定数 $C > 0$ が存在し

$$|T(f)| \leq C\|f\|, \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

が成り立つことである．T のノルム $\|T\|$ は次によって定義される．

$$\|T\| = \sup_{f \in \mathcal{H}} |T(f)|/\|f\|.$$

次のリース (F. Riesz) の定理はよく知られている．

定理 A.3.1 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界な線形汎関数 T に対して，ある $g \in \mathcal{H}$ が存在し

$$T(f) = (f, g), \quad \forall g \in \mathcal{H}, \quad \|T\| = \|g\|$$

が成り立つ．

有限次元のヒルベルト空間の有界集合は相対コンパクトである．即ちその中の任意の無限列から収束する部分列を選び出すことができる．これはボルツァノ・ワイエルシュトラス (Bolzano-Weierstrass) の定理である．無限次元では

この定理は成り立たないが弱収束の意味では成り立つ．ここに弱収束の重要な意義がある．

定理 A.3.2 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界なら，即ち $\sup_n \|f_n\| < \infty$ なら，ある部分列 $\{f_{n'}\}$ と $f \in \mathcal{H}$ が存在し，$f_{n'}$ は f に弱収束する．

証明 定数 $C > 0$ が存在し，$\|f_n\| \le C$, $n = 1, 2, \cdots$ である．f_n の 1 次結合全体を L, その閉包を S とおく．数列 $(f_1, f_n), n = 1, 2, \cdots$ は $|(f_1, f_n)| \le \|f_1\|\|f_n\| \le C^2$ より有界であるから，ある部分列 $f_{1n}, n = 1, 2, \cdots$ が存在し $(f_1, f_{1n}), n = 1, 2, \cdots$ は収束列となる．同様に $(f_2, f_{1n}), n = 1, 2, \cdots$ は有界であるから，ある部分列 $f_{2n}, n = 1, 2, \cdots$ が存在し $(f_2, f_{2n}), n = 1, 2, \cdots$ は収束列となる．この操作を繰り返して

$$
\begin{array}{llll}
f_{11}, & f_{12}, & f_{13}, & \cdots \\
f_{21}, & f_{22}, & f_{23}, & \cdots \\
f_{31}, & f_{32}, & f_{33}, & \cdots \\
\multicolumn{4}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}
$$

という無限列が得られる．各行はそれよりも上にある行の部分列になっている．対角線にあるベクトルの列 $f_{nn}, n = 1, 2, \cdots$ は任意の i に対して $\lim_{n\to\infty}(f_i, f_{nn})$ が存在する．よって任意の $f \in L$ に対して $\lim_{n\to\infty}(f, f_{nn})$ は存在する．任意の $g \in S$ と $\epsilon > 0$ に対して $\|f - g\| < \epsilon$ となる $f \in L$ が存在する．$(g, f_{nn}) = (g - f, f_{nn}) + (f, f_{nn})$ を考えれば $\lim_{n\to\infty}(g, f_{nn})$ が存在することが分かる．$S^{\perp} \ni h$ に対しては $(h, f_{nn}) = 0$ である．よって任意の $g \in \mathcal{H}$ に対して $T(g) := \lim_{n\to\infty}(g, f_{nn})$ が存在する．$|(g, f_{nn})| \le C\|g\|$ であるから $|T(g)| \le C\|g\|$ であり，T は $\mathcal{H}$ 上の有界な線形汎関数である．よってリースの定理から $T(g) = (g, f), \forall g \in \mathcal{H}$ となる $f \in \mathcal{H}$ が存在する．これは f_{nn} が f に弱収束することを示している．□

A.4 関数解析の基礎概念

定理 3.4.6 を証明するのがこの節の目的であるが，実はこの定理は関数解析学の基礎に深く結び付いているものである．初めて学ぶときには証明そのものよりも基本となる概念を理解することに努めるのがよいであろう．

X という集合上の**距離**とは，$X \times X$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 $d(\cdot, \cdot)$ で次の性質を持つものである．

(1) $d(x, y) \ge 0$.

(2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(3) $d(x, y) = d(y, x)$.

(4) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$.

$d(x_n, x_m) \to 0\ (m, n \to \infty)$ を満たす点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ を X の中のコーシー列という．任意のコーシー列が収束するとき，X を**完備**な距離空間という．

X が $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間のとき（$\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間の場合も同様である．以下の議論で $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{R}$ に変えればよい），X から $\boldsymbol{R}$ への次のような性質を持つ写像 $\|\cdot\|$ を X の**ノルム**という．

(5) $\|x\| \geq 0.$

(6) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

(7) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \quad \lambda \in \boldsymbol{C}.$

(8) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

ノルムが与えられた空間をノルム空間という．$d(x, y) = \|x - y\|$ とおけば $d(\cdot, \cdot)$ は距離の公理 (1) ～ (4) を満たす．ノルム空間 X がこの距離に関して完備であるとき**バナッハ空間** (Banach space) という．

X, Y をノルム空間とし $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ を X, Y のノルムとする．X から Y への線形作用素 A が

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y < \infty, \quad \forall x \in X$$

を満たすとき有界であるという．$\|A\|$ はノルムの公理 (5) ～ (8) を満たす．$\boldsymbol{B}(X; Y)$ で X から Y への有界な線形作用素全体を表す．以下簡単のために X, Y のノルムも作用素 A のノルムも同じ記号 $\|\cdot\|$ で表すことにする．

関数解析学の基本定理として，線形汎関数の拡張に関するハーン・バナッハ (Hahn-Banach) の定理（これについては本書では述べないことにする）と次の 2 つが挙げられる．

定理 A.4.1 バナッハ空間 X, ノルム空間 Y, $A_n \in \boldsymbol{B}(X; Y)$, $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\sup_n \|A_n x\| < \infty, \quad \forall x \in X$$

が成り立つなら

$$\sup_n \|A_n\| < \infty.$$

定理 A.4.2 X, Y をバナッハ空間とし A は X 全体で定義された Y への線形作用素で

$$\|x_n - x\| \to 0,\ \|Ax_n - y\| \to 0 \implies Ax = y$$

が成り立つならば

$$A \in \boldsymbol{B}(X; Y).$$

定理 A.4.1 は一様有界性の原理，またはバナッハ・スタインハウス (Banach-Steinhaus) の定理，定理 A.4.2 は閉グラフ定理，とも呼ばれる．多くの数学の定理は抽象的なものであっても具体的な状況では簡単な別証明があることが多いのだが，これらの定理は具体的な場合でも簡単な証明を見つけることが難しい．基本定理と呼ばれる所以である．証明の基礎になるのはベール (Baire) のカテゴリー (category) 定理と呼ばれる次の定理である．

定理 A.4.3 完備距離空間 X が可算個の閉集合 F_n によって $X=\bigcup_n F_n$ と表されるとき，n, $x_0 \in F_n$, $\epsilon > 0$ が存在し

$$\{x \in X\,;\, d(x, x_0) < \epsilon\} \subset F_n.$$

$\|\cdot\|$ が (6) を除いた (1) ～ (8) を満たすときセミノルムという．ベクトル空間 X が**フレッシェ空間** (Fréchet space) であるとは加算個のセミノルム $p_n, n=1,2,\cdots$ が与えられており次の性質を持つときをいう．

(9) $p_1(x) \le p_2(x) \le \cdots$.

(10) $p_n(x) = 0,\ \forall n \Longrightarrow x = 0$.

(11) $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X$ が $p_n(x_j - x_k) \to 0,\ j,k \to \infty,\ \forall n$ を満たせば $x \in X$ が存在し $p_n(x_j - x) \to 0,\ j \to \infty,\ \forall n$.

フレッシェ空間には次のような距離を与えることができる．

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}.$$

この距離による収束と公理 (11) による収束とは同値である．

一様有界性の原理は次のようにしてフレッシェ空間にも拡張される．X' を X 上の連続な線形汎関数の全体とする．

定理 A.4.4 X をフレッシェ空間とし，p_n, $n=1,2,\cdots$ を (9), (10), (11) を満たす X のセミノルムとする．$\{T_j\} \subset X'$ が

$$\sup_j |T_j(x)| < \infty, \quad \forall x \in X$$

を満たせば定数 $C > 0$ と n が存在し

$$|T_j(x)| \le C p_n(x), \quad \forall x \in X, \quad \forall j.$$

さて定理 3.4.6 を証明しよう．$T_j \in \mathcal{D}'(I)$, $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ に対して

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle T_j, \varphi \rangle$$

によって汎関数 T を定義する．右辺の極限が存在するというのが仮定である．T は線形である．I の中に任意にコンパクトな区間 K をとる．加算個のセミ

ノルム $p_{n,K}$ を

$$p_{n,K}(\varphi) = \sup_{x\in K} \sum_{0\le m\le n} |\varphi^{(m)}(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

によって定義すれば $C_0^\infty(K)$ はフレッシェ空間になる．$\varphi \in C_0^\infty(K)$ を固定するごとに $\{\langle T_j, \varphi\rangle\}_{j=1}^\infty$ は有界であるから定理 A.4.4 によってある n と C が存在し

$$|\langle T_j, \varphi\rangle| \le C p_{n,K}(\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K), \quad \forall j$$

である．$j \to \infty$ として

$$|\langle T, \varphi\rangle| \le C p_{n,K}(\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K)$$

となるから $T \in \mathcal{D}'(I)$ である．□

A.5 1次元ソボレフ空間

1次元のソボレフ空間と絶対連続関数についてまとめておこう．$f(x)$ が有界閉区間 $I = [a, b]$ 上で**絶対連続**とは，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し次のことが成り立つことである: 互いに交わらない任意の有限個の区間 (a_k, b_k), $k = 1, 2, \cdots, n$ で $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ となるものに対し $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$ となる．絶対連続関数に関しては次の定理が基本的である．

定理 A.5.1 $f(x)$ が $I = [a, b]$ 上で絶対連続なら殆どいたるところで微分可能であり，$f'(x) \in L^1(I)$ でかつ

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)dy, \quad a \le x \le b$$

が成り立つ．また $g(x) \in L^1(I)$ のとき

$$f(x) = \int_a^x g(y)dy, \quad a \le x \le b$$

とおけば $f(x)$ は I 上で絶対連続であり，$f'(x) = g(x)$ a.e. on I である．

系 A.5.2 $f(x), g(x)$ が $I = [a, b]$ 上で絶対連続なら

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

定理 A.5.1 についてはルベーグ積分の教科書を見られたい．系 A.5.2 は

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g((x) + f(x)g'(x)$$

を積分することにより分かる．

$f(x)$ が開区間 I 上で**局所絶対連続**とは I に含まれる任意の有界閉区間上で絶対連続であることとする．

さて超関数の意味での微分可能性と絶対連続性との関係を考えよう．混乱を避けるために超関数 $T(x)$ の微分を $DT(x)$ と書くことにする．

定理 A.5.3　I を開区間 (有界でも非有界でもよい) とし，$f(x), g(x) \in L^1_{loc}(I)$ とする．このとき超関数の意味で $Df(x) = g(x)$ であることと，$f(x)$ が I 上局所絶対連続，かつ $f'(x) = g(x)$ a.e. on I であることとは同値である．

証明　$f(x)$ が I 上局所絶対連続なら系 A.5.2 によって任意の $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ に対し

$$\int_I f(x)\varphi'(x)dx = -\int_I f'(x)\varphi(x)dx$$

である．これは $Df(x) = f'(x)$ が超関数の意味で成り立つことを意味する．

逆に超関数の意味で $Df(x) = g(x)$ なら

$$\int_I f(x)\varphi'(x)dx = -\int_I g(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(I)$$

である．$I \ni c$ を任意にとり

$$F(x) = \int_c^x g(y)dy$$

とおけば $F(x)$ は I 上局所絶対連続で $F'(x) = g(x)$ a.e. on I である．このとき

$$\int_I g(x)\varphi(x)dx = -\int_I F(x)\varphi'(x)dx, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(I)$$

であるから

$$\int_I \big(f(x) - F(x)\big)\varphi'(x)dx = 0, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(I)$$

が成り立つ．これは $D(f(x) - F(x)) = 0$ を意味するから補題 3.3.1 により $f(x) - F(x)$ は定数である．従って定理 A.5.1 により $f(x)$ は I 上局所絶対連続で $f'(x) = F'(x) = g(x)$ a.e. on I である．□

この定理により局所絶対連続関数に対しては超関数の意味での微分と殆どいたるところでの微分とは同じものであるから，両者を $f'(x)$ で表すことにする．高階微分も通常の記号で表す．

補題 A.5.4　I を任意の開区間，$m \geq 1$ を整数とする．$f \in H^m(I)$ であるための必要十分条件は

(i)　$f \in C^{m-1}(I)$,

(ii)　$f^{(m-1)}$ は I 上局所絶対連続,

(iii)　$f^{(k)} \in L^2(I)$,　$k = 0, \cdots, m$

が成り立つことである．

証明　十分条件であることは部分積分により直ちに分かる．必要性を示す．$m=1$ の場合は定理 A.5.3 により成り立つ．$m=n$ で成り立つとする．$f \in H^{(n+1)}(I)$ なら $f \in H^{(n)}(I)$ であるから $f \in C^{n-1}(I)$，$f^{(n-1)}$ は I 上局所絶対連続，$f^{(k)} \in L^2(I)$，$k=0,\cdots,n$ である．$f \in H^{(n+1)}(I)$ であることより $f_{n+1} \in L^2(I)$ が存在し，$D^{n+1}f = f_{n+1}$ である．$\varphi \in \mathcal{D}(I)$ に対して

$$\langle f_{n+1}, \varphi \rangle = (-1)^{n+1}\langle f, \varphi^{(n+1)} \rangle = -\langle f^{(n)}, \varphi' \rangle$$

であるから超関数の意味で $Df^{(n)} = f_{n+1}$ である．よって定理 A.5.3 によって $f^{(n)}$ は I 上局所絶対連続で $f^{(n+1)} = f_{n+1} \in L^2(I)$ である．また $f \in C^n(I)$ であるから補題が $m=n+1$ の場合に示された．□

境界値問題を考えるときにはソボレフ空間に属する関数の境界値が重要になる．

補題 A.5.5　$I=(a,b)$ を有界開区間とするとき $f(x) \in H^1(I)$ は $x=a$，$x=b$ まで連続的に延長される．さらに定数 $C>0$ が存在し

$$|f(a)| + |f(b)| \le C\|f\|_{H^1(I)}, \quad \forall f \in H^1(I) \tag{A.18}$$

が成り立つ．

証明　$c \in (a,b)$ を任意にとり $\varphi \in C_0^\infty(I)$ で $\varphi(c)=1$ となるものをとる．$g(x)=\varphi(x)f(x)$ とおけば

$$g(x) - g(c) = \int_c^x g'(y)dy$$

であるから x を φ の台の外にとることにより

$$|f(c)| = |g(c)| \le \int_c^x |g'(y)|dy \le C\|f\|_{H^1(I)}$$

が得られる．

$$f(c) - f(x) = \int_x^c f'(y)dy, \quad x < c$$

であるから $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在する．さらに

$$|f(a)| \le |f(c)| + \int_a^c |f'(y)|dy \le C\|f\|_{H(I)}$$

より $f(a)$ に対して (A.18) が示された．$f(b)$ に対しても同様である．□

補題 A.5.5 は $I=(a,\infty)$ という半無限区間においては端点 a に対して成立する．

スツルム・リュービル (Sturm-Liouville) 型の微分方程式の超関数解について考えよう．

定理 A.5.6 $I = (a,b)$ を有界開区間とし $a(x), b(x) \in C^\infty(I)$ とする．$u(x), g(x) \in L^1_{loc}(I)$ が超関数の意味で

$$u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = g(x) \tag{A.19}$$

を満たせば $u(x) \in C^1(I)$, $u'(x)$ は I 上局所絶対連続で (A.19) が殆どいたるところ成り立つ．さらに $u(x), g(x) \in L^1(I)$, $a(x), a'(x), b(x) \in L^\infty(I)$ なら

$$\lim_{x\to a} u(x), \quad \lim_{x\to a} u'(x)$$

が存在する．$x = b$ でも同様である．

証明 超関数の意味で

$$\bigl(u' + au\bigr)' = g - bu + a'u \tag{A.20}$$

が成り立つから $u' + au$ は局所絶対連続である．これを h とおくと

$$u' = h - au \tag{A.21}$$

より u が局所絶対連続になる．よって右辺は連続だから $u \in C^1(I)$ であり，u' は I 上局所絶対連続になる．従って u' は殆どいたるところ微分可能であり，(A.19) は殆どいたるところで成り立つ．

定理の後半を示す．(A.20) の右辺は $L^1(I)$ に属するから $\lim_{x\to a} h(x)$ が存在する．よって (A.21) の右辺が $L^1(I)$ に属すので $\lim_{x\to a} u(x)$ が存在する．このことから $\lim_{x\to a} u'(x)$ も存在する． □

上の定理の前半は任意の区間上で成立する．後半は (a, ∞) のような半無限区間でも $x = a$ において成立する．

参考文献

[1] E. C. Titchmarsh, The Theory of Functions, Second edition, Oxford University Press (1932).

[2] 一松信，多変数解析函数論，培風館 (1960).

[3] 森口繁一・宇田川銈久・一松信，数学公式 III, 岩波書店 (1960).

[4] K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Princeton-Hall, INC., Engelwood Cliffs, N. J. (1962).

[5] 溝畑茂，偏微分方程式論，岩波書店 (1965).

[6] L. シュワルツ，物理数学の方法，吉田耕作・渡辺二郎訳，岩波書店 (1966).

[7] R. クーラン・D. ヒルベルト，数理物理学の方法，第 4 巻，斎藤利弥監訳，麻島格次郎訳，東京図書 (1968).

[8] 加藤敏夫，位相解析——理論と応用への入門，共立出版 (1967).

[9] コルモゴロフ・フォミーン，函数解析の基礎 第 2 版，山崎三郎訳，岩波書店 (1971).

[10] L. シュワルツ，超函数の理論（原書第 3 版），岩村聯・石垣春夫・鈴木文夫訳，岩波書店 (1971).

[11] 溝畑茂，数学解析（下），朝倉書店 (1973).

[12] F. リース・B. ナジー，関数解析学（上・下），秋月康夫監訳，絹川正吉・清原岑夫訳，共立出版（上：1973，下：1974）.

[13] 熊ノ郷準，擬微分作用素，岩波書店 (1974).

[14] 河田龍夫，FOURIER 解析，産業図書 (1975).

[15] 金子晃，定数係数線型偏微分方程式，岩波講座基礎数学，岩波書店 (1976).

[16] 小松彦三郎，Fourier 解析，岩波講座 基礎数学，岩波書店 (1978).

[17] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Distribution Theory and Fourier Analysis, Springer (1983).

[18] A. Grigis - J. Sjöstrand, Microlocal Analysis for Differential Operators, Cambridge University Press (1994).

[19] 井川満，偏微分方程論式入門——数学の基礎的諸分野への現代的入門，裳華房 (1996).

[20] 猪狩惺，実解析入門，岩波書店 (1996).

[21] 金子晃，偏微分方程式入門，東京大学出版会 (1998).

[22] 谷島賢二，ルベーグ積分と関数解析，朝倉書店 (2002).

[23] 柴田良弘，ルベーグ積分論，内田老鶴圃 (2006).

[24] L. シュヴァルツ，闘いの世紀を生きた数学者——ローラン・シュヴァルツ自伝 (上・下)，彌永健一訳，シュプリンガー・ジャパン (2006).

[25] 宮島静雄，ソボレフ空間の基礎と応用，共立出版 (2006).

[26] J. A. ソープ，微分幾何の基本概念，後藤ミドリ・石川晋・糸川銚訳，シュプリンガー・ジャパン (2006).

[24] は超関数の理論の創始者自身の回想録である．最初にエコール・ポリテクニクでディラックのデルタ関数の話を聞いたときは荒唐無稽としか思えなかった著者が 9 年後にそれを正当化した経緯，今日では何気なく通過してしまう超関数の微分の定義を聞いてカルタンが長嘆息したこと，フーリエ変換は変数係数線形偏微分方程式には有効ではないであろうと予想していたこと，ペトロフス

キーがアダマールをモスクワに紹介したときの話，ブルバキ数学叢書を執筆していた頃の様子等，興味深い逸話が多数書かれている．

ルベーグ積分は学ぶのに手間がかかる．二度，三度と目標を変えて学ぶのがよいであろう．まず全体を大づかみに理解したい場合には [8] が好適である．ルベーグ積分を使うことを主眼とする人を対象に理論の意味が説明されている．簡略にされがちなスチルチェス積分も詳しく説明されており，関数解析学の基本も同時に学ぶことができる．一般的な測度論そのものに対しては簡潔に仕上げられたカラテオドリの理論が存在している．数学に深入りしたい人はこの測度論に一度は目を通す必要があるだろう．ルベーグ積分論には実解析と呼ばれる関数や集合の微細な性質を論ずる分野が付随している．ルベーグ積分論の面白さも難しさも実はこの実解析の部分にある．昔の本には実解析が詳しく書かれた名著が多く，今日でもその良さを失っていない．特に挙げるとするならば，ティッチマーシュ [1] はルベーグ積分，関数論，フーリエ解析まで高度な内容を明晰に語る名著である．コルモゴロフ・フォミーン [9], リース・ナジー [12] も関数解析学の入門も兼ねた実解析の名著である．最近の和書では [20], [22], [23] 等がフーリエ解析，関数解析等も含んだ良書である．本書ではフーリエ級数の話を省略せざるを得なかった．これについては [6] がよいであろう．この本は超関数とその応用を初等的に解説したもので本書と併せて読めば相補うであろう．

本書につながる解析学の専門分野としては，フーリエ解析や偏微分方程式論がある．[16] には本書では述べなかった補間定理の話等も含まれており，さらに進んだ実解析の話題を知るのに好適である．偏微分方程式論に関しては和書では [5] が一時代を風靡した名著である．フーリエ変換による微分作用素の一般化として擬微分作用素と呼ばれるものがあるが，[13] にはその理論と応用が明解に述べられている．偏微分方程式の入門的な本としては [15], 最近のものでは [19], [21] 等がある．[17] は偏微分方程式論の基礎から始まって巨大な体系を解説したものであるが全部で 4 巻あり通読するには骨がおれる．[18] は擬微分作用素論に限定して偏微分方程式と超局所解析学への入り口にと導く良書である．ソボレフ空間については和書では [25] が詳しく丁寧に説明している．

索　引

マ

ヤ

ラ

ワ

欧字

著者略歴

磯崎　洋（いそざき　ひろし）

1950年生
1972年　京都大学理学部卒業
現　在　筑波大学大学院数理物質科学研究科教授．理学博士
専　門　数理物理学，とくにシュレーディンガー作用素の散乱理論と逆問題

主要著書
数理物理学における微分方程式（日本評論社，2000）
多体シュレーディンガー方程式（シュプリンガー東京，2004）

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ- 72
『超関数・フーリエ変換入門　基礎から偏微分方程式への応用まで』

著　者　磯崎 洋
2010年 3 月25日　初版発行

数理科学編集部　　発行人　木下敏孝
TEL.(03)5474-8816
FAX.(03)5474-8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで．

表紙デザイン：長谷部貴志

発行所　©　株式会社　サイエンス社　TEL.(03)5474-8500 (代表)
〒151-0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1-3-25　振替 00170-7-2387　(03)5474-8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁